Ecuaciones Lineales con dos variables

<u>Sistemas de Coordenadas Cartesianas</u>

El sistema de coordenadas cartesianas es formado por dos rectas; una horizontal y otra vertical, en el cual ambos se cruzan en el punto 0 de cada recta. Las dos rectas son llamados ejes.

Estos dos ejes dividen el plano cartesiano en 4 secciones llamadas cuadrantes. Estas cuadrantes son numeradas en forma “contra el reloj” del I al IV de la siguiente forma:

II (-, +) CUADRANTE	I (+, +) CUADRANTE
III (-, -) CUADRANTE	IV (+, -) CUADRANTE

Cada punto en el plano se puede identificar por un par de números llamado par o pareja ordenada (x, y).

El primer número del par, que se llama la abscisa; está en la recta horizontal, el eje de x.

El segundo número del par se llama la ordenada que se encuentra en la recta vertical, el eje de y.

El sistema de coordenadas es usada además de localización de puntos en el plano, para graficar el conjunto de soluciones de ecuaciones de dos variables como:

$y = 4x + 8$
$y = x^2 + 2x + 5$
$3y = 5x + 8$

Digamos que queremos hacer la gráfica la ecuación lineal $y = 3x + 7$. Hay que asignar valores a la x y resolverlo para encontrar el valor de y. Con los resultados se forman los puntos de la gráfica de la siguiente manera:

Ej. Encontrar los puntos de la ecuación $y = 3x + 7$. Vamos a utilizar la siguiente tabla para organizar el trabajo. Le daremos a la x , los valores de -2, -1, 0, 1 y 2

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

Y = 3x + 7
[Cuando la x es -2, la y es 1]

Y = 3(-2) + 7
Y = -6 + 7
Y = 1

Y = 3x + 7
[Cuando la x es -1, la y es 4]

Y = 3(-1) + 7
Y = -3 + 7
Y =4

Y = 3x + 7

Cuando la x es 0, la y es 7
Y = 3(0) + 7
Y = 0 + 7
Y = 7

Y = 3x + 7

Cuando la x es 1, la y es 10

Y=3(1) + 7

Y= 3 + 7

Y = 10

Y = 3x + 7

Cuando la x es 2, la y es 13

Y= 3(2) + 7

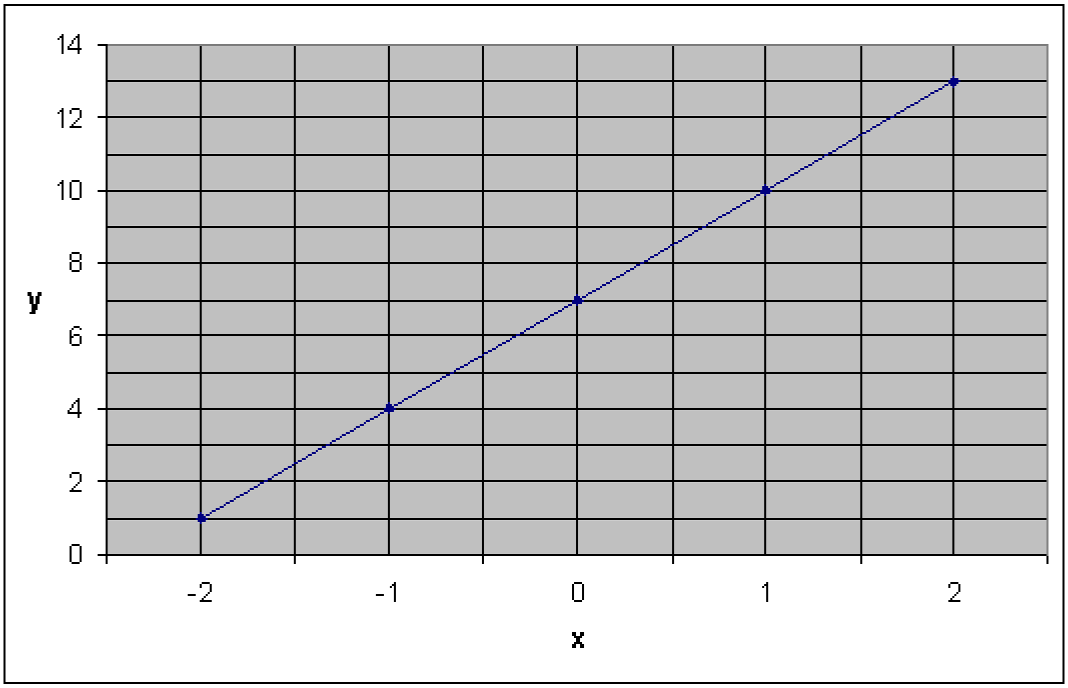
Y= 6 + 7

Y = 13

Entonces los valores de y correspondientes a cada unos de los valores de x asignados , quedan ilustrados en la siguiente tabla:

x	y
-2	1
-1	4
0	7
1	10
2	13

Y asi se resuelve con cada valor que le quieras dar a la x de la tabla. Es por esto que x se llama la variable independiente, ya que le puedes dar cualquier valor de su dominio, que son los valores permitidos para la x. En el caso de está ecuación lineal , x puede ser cualquier número real, Veamos como queda la gráfica de la ecuación y = 3x + 7.



Para verificar que un punto sea solución de la ecuación hay que hacer lo siguiente:

1. Sustituir la abscisa por x.
2. Sustituir la ordenada por la y. (siempre recordar la forma {x,y})
3. Resolver la ecuación.
4. Si el lado izquierdo es igual al lado derecho de la igualdad , entonces el punto es solución de la ecuación.

Ejemplo 1 : ¿ Es (3,11) una solucion a la ecuación y = 2x + 5?

Y = 2x + 5
11 = 2(3) + 5 < Sustituir los puntos por x y y>
11 = 6 + 5 < Resolver>
11 = 11 < Hay igualdad>
Quiere decir que el punto (3,11) es una solucion a la ecuación.

Ejemplo 2: ¿ Es (2,8) una solucion de la ecuación y = 2x + 5?

y = 2x + 5
8 = 2(2) + 5 < Se sustituyo la x y la y>
8 = 4 + 5 < Resolver>
8 = 9 <FALSO, no es solución>

El punto (2,8) no es solución.

Intercepciones , pendiente y ecuación de la recta

Las ecuaciones lineales con 2 variables

Una ecuación lineal con 2 variables X y Y tienen la forma ordinaria o general

$$ax + by = c$$

Donde a y b son números reales y a y b ≠ 0 .

Las ecuaciones lineales son de primer grado, cada variable de la ecuación está elevada a la primera potencia.

Una ecuación lineal con n variables $x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots .x_n$ tiene la forma general

$$a_1x_1 +\ a_2\,x_2\ +\ a_3\ x_3\ + \cdots +\ a_n\,x_n = b$$

Donde $a_1,\ a_2\ ,\ a_3\ , \ldots a_n$ son números reales y no todas las $a_1,\ a_2\ ,\ a_3\ , \ldots a_n$ son = ≠ 0

Las siguientes expresiones son ejemplos de ecuaciones lineales:

$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$, $-x_1 + 3x_2 -4x_3 + 5x_4 -x_5 + 2x_6 = 80$

En el caso de una ecuación lineal de la forma, $ax + by = c$, el conjunto solución de la ecuación es el conjunto de todos los pares o pareja ordenadas (x, y) que satisfagan la ecuación.

Si la ecuación de la recta tiene la forma $\boldsymbol{y = mx + b}$ **conocida como forma pendiente ordenada al origen**

m representa la pendiente o inclinación de la recta y

b es el valor de y en el punto donde la recta corta al eje y

El punto de la intercepción con el eje y , esta expresada por: (0,b) y es donde la recta corta el eje de y .

El punto de intercepción con el eje x esta expresada por: (a,0) y es donde la recta corta el eje de x.

Si la ecuación es y = 2x + -6, el punto de intercepción con el eje y seria: (0,-6)

Ejemplo 1: Buscar el punto donde la recta corta al eje y de la ecuación y = 3x + -5.

Solucion: En este caso, la b es -5; quiere decir que el punto donde la recta corta al eje y es (0,-5)

Ejemplo 2: Buscar el punto donde la recta corta al eje y de la ecuación y = 4x.

Solucion: En este caso, la b no está presente en la ecuación, pero la ecuación y = 4x equivale a

y = 4x + 0. Por lo tanto, el punto donde la recta corta al eje y es (0, 0).

Ejemplo 3: Buscar el punto donde la recta corta al eje y de la ecuación

$$3y = 18x + 24$$

Solucion: ¡Ojo! El valor de b no es 24, hay que fijarse bien que la ecuación no esta en su forma y = mx + b, hay que despejar de la siguiente manera:

$y = \frac{18x}{3} + \frac{24}{3}$ $\quad$ $y = 6x + 8$

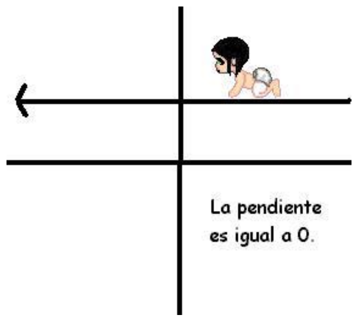
Ahora, esta en su forma y = mx + b. por lo tanto el valor de b es 8 entonces el punto donde la recta corta al eje y estará definido por (0, 8)

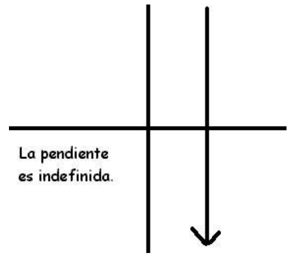
La Pendiente

La pendiente es la inclinación de una recta. Una forma de calcular la pendiente de una recta es usando la siguiente fórmula. Dado dos puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2),que están en una recta L, la inclinación o la pendiente m de la recta de determina mediante

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ como $\Delta y = y_2 - y_1$ y $\Delta x = x_2 - x_1$ entonces $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

La pendiente es la razón de cambios de y y x. . Esta puede ser positiva, negativa, puede ser 0 y en algunos casos, la pendiente esta indefinida.





Ejemplo1: calcular la pendiente de una recta que pasa por los puntos (2,4) y (3,6)

$$\boldsymbol{m = \frac{y_{2-}y_1}{x_{2-}x_1} \qquad m = \frac{6\ -\ 4}{3-\ 2} = \ \frac{2}{1} = 2}$$

La pendiente m es 2.

A veces, tenemos dos puntos, y queremos hallar la ecuación de la recta que pasa por estos puntos. Primero, hay que determinar la pendiente de la recta, y para hallar la ecuación, utilizamos la ecuación y = mx + b donde m es la pendiente de la recta y b es el valor de y en el punto donde la recta corta al eje y

Ejemplo: Buscar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,5) y (0,9).

$$\mathbf{m = \frac{9\ -5}{0-\ 1} = \ \frac{4}{-1} = -4}$$

La pendiente es -4. Ahora, hay que buscar el punto donde la recta corta al eje y en y. En este caso, ya está dado por (0,9)

Nota: Para buscar el punto donde la recta corta al eje y, hay que siempre fijarse que la ecuación este en su forma y = mx + b. Si no lo está, hay que expresarla respecto a y.

Ejemplo: 9x - 3y = 12 <No esta en la forma y = mx + b>

-3y = -9x + 12 <Dejar la y sola, pasar el 9x opuesto>

$$Y = \frac{-9x}{-3} + \frac{12}{-3}$$

y = 3x - 4

Ya está en su forma y = mx + b, entonces el valor de b es -4.

También se puede encontrar el valor de b , sustituyendo la x por 0.

<u>Punto de Intercepción de la recta con el eje y y con el eje x</u>

El punto de intercepción de la recta con el eje y está definido por el punto (0, b)

Para calcular este punto basta con sustituir el valor de x = 0 en la ecuación y despejando y de la ecuación obtenemos el valor de y= b. con los valores de x= 0 y y= b definimos el punto (o, b) donde la recta corta al eje y .

El punto de intercepción de la recta con el eje x está definido por el punto (a, 0).

Para calcular este punto basta con sustituir el valor de y = 0 en la ecuación y despejando x de la ecuación obtendremos el valor de x = a , con los valores de x=a y y = 0 tenemos el punto (a, 0) que es donde la recta corta al eje x .

Ejemplo sea la siguiente recta $y = 9x + 5$ calcular los puntos donde la recta corta al eje y y al eje x

Para buscar el punto donde la recta corta al eje y , a la x le damos el valor de 0 y lo sustituimos en la ecuación $Y = 9 (0) + 5 = 5$ entonces $b = 5$ con x=0 y con b=6 definimos el punto (0, 6) que es el punto donde la recta corta al eje y .

Para buscar el punto donde la recta corta al eje x, se sustituye la y por 0 en la ecuación. $y = 9x + 5$

$0 = 9x + 5$ $-9x = 5$ $x = -5/9$, entonces $a = -5/9$ por lo tanto con $x = -5/9$ y $y= 0$, definimos el punto (-5/9, 0) que es el punto donde la recta corta al eje x

otra forma de encontrar los puntos donde la recta corta al eje y y al eje x es determinando los valores que le faltan al siguiente cuadro:

X	**Y**	**punto donde la recta corta al eje**
0		**Y**
	0	**X**

FORMAS PARA CALCULAR LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

FORMA PENDIENTE ORDENADA AL ORIGEN

Si de la recta se conoce la pendiente m y el valor de b , para calcular la ecuación de la recta usamos la forma pendiente ordenada al origen

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

Ejemplo. Calcular la ecuación de la recta que tiene pendiente m igual a -4, y el punto donde la recta corta al eje y es (0,9) entonces b es = 6 , usando $\boldsymbol{y = mx + b}$ ecuación es:

y = -4x + 9

FORMA PUNTO PENDIENTE .Si de la recta se conoce la pendiente m y el valor de un punto $(\boldsymbol{x_1, y_1})$, para calcular la ecuación de la recta; usamos la forma punto pendiente

$$\boldsymbol{y - y_1 = \mathrm{m}\,(\mathrm{x} - x_1)}$$

Ejemplo: Buscar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,-7) y tiene pendiente de 8.

m= 8 $x_1 = 3$ $y_1 = -7$ sustituyendo estos valores en $y - y_1 = \mathrm{m}\,(\mathrm{x} - x_1)$

tenemos lo siguiente:

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$
y - (-7) = 8(x -3) <Se sustituyó>
y + 7 = 8x - 24
y = 8x - 24 -7 <Se resuelve hasta dejarlo en y=mx+b>
y = 8x - 31

FORMA DE DOS PUNTOS. Si de la recta se conocen dos puntos $(\boldsymbol{x_1, y_1})$ y $(\boldsymbol{x_2, y_2})$, para calcular la ecuación de la recta usamos la forma de dos puntos

$$\boldsymbol{y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(\mathrm{x} - x_1)}$$

Ejemplo: calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $p_1(1,5)$ y $p_2(0,9)$.

Como $x_1 = 1$ $y_1 = 5$ $x_2 = 0$ $y_2 = 9$ estos valores se sustituyen en la forma dos puntos

$$y - y_1 = (\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})\ (x - x_1)$$

$$y - 5 = (\frac{9-5}{0-1})\ (x - 1)$$

$$y - 5 = (\frac{4}{-1})\ (x - 1)$$

Y – 5 = - 4 (x - 1) y - 5 = - 4 x + 4 y = - 4 x + 4 + 5 la ecuación de la recta es y = - 4 x + 9

FORMA INTERSECCIÓN

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{o} \quad y = \frac{-b}{a}\ x + b$$

Esta forma se usa cuando se conocen los puntos : (o, b) y (a, 0) donde la recta corta al eje y y al eje x .

Por ejemplo calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, 5) y (-3, 0) como a = -3 y b = 5 , sustituyendo estos valores en $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ tenemos entonces que la ecuación de la recta es : $\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$ o $y = \frac{-5}{-3}\ x + 5$ $y = \frac{5}{3}\ x + 5$

RECTAS PARALELAS Y RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 , son paralelas si $m_1 = m_2$.

Dos rectas con m_1 y m_2 , son perpendiculares si $m_1 \cdot m_2 = -1$

Si de la recta se conocen	**Forma que se usa para calcular la ecuación de un a recta**
Un punto (x_1 , y_1) y su pendiente m	**Forma de punto pendiente** $y - y_1 = m(x - x_1)$
La pendiente m y el valor de b	**Forma pendiente ordenada al origen** $y = mx + b$
Dos puntos (x_1 , y_1) y (x_2 , y_2)	**Forma dos puntos** $y - y_1 = (\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})\ (x - x_1)$
Cuando se tienen los puntos (0, b) y (a , 0) donde la recta cortan al eje y y al eje x	**Forma intersección** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Forma de la recta	**Ecuación de la recta**
Línea horizontal tiene pendiente m = 0	**Y = b**
Línea vertical tiene pendiente m indefinida	**X = a**

I En cada una de las siguientes rectas, calcule los puntos donde la recta corta al eje y y al eje x y con estos puntos haga su gráfica y además calcule su pendiente.

1. $-3x - 4y = 24$
   sol. Con el eje y (0, -6) y con el eje x (-8, 0) y la $m = -\frac{3}{4}$
2. **8x – y = -16**
   sol. Con el eje y (0, 16) y con el eje x (-2, 0) y la $m = 8$
3. **-2x + 2 y = 16**
   sol. Con el eje y (0, 8) y con el eje x (-8, 0) y la $m = 1$
4. **3x + 12 = -2y**
   sol. Con el eje y (0, -6) y con el eje x (-4, 0) y la $m = -\frac{3}{2}$
5. **15x = 120**
   sol. Recta vertical paralela al eje y , corta solo al eje x en (-8, 0) y la $m\ es\ indefinida$
6. **-2y +20 = 0**
   sol. Recta horizontal paralela al eje x , corta solo al eje y en (0, 10) y la $m = 0$
7. $x - 4 = \frac{x+y}{2}$
   sol. Con el eje y (0, -8) y con el eje x (8, 0) y la $m = 1$
8. $x + 4 = \frac{-(x+y)}{3}$
   sol. Con el eje y (0, -12) y con el eje x (-3, 0) y la $m = -4$
9. **4 x + 8y = 56**
   sol. Con el eje y (0, 7) y con el eje x (14, 0) y la $m = -\frac{1}{2}$

14. **3x – 2 y = - 12**
    sol. Con el eje y (0, 6) y con el eje x (-4, 0) y la $m = \frac{3}{2}$
15. **2 x - y = 0**
    sol. Con el eje y (0, 0) y con el eje x (0, 0) y la $m = 2$ **es una recta que pasa por el origen**
16. $2x = \frac{x+y}{3}$
    sol. Con el eje y (0, 0) y con el eje x (0, 0) y la $m = 5$ **es una recta que pasa por el origen**
17. **–x + y = 0**
    sol. Con el eje y (0, 0) y con el eje x (0, 0) y la $m = 1$ **es una recta que pasa por el origen**
18. **-3y = 21**
    sol. Recta horizontal paralela al eje x , corta solo al eje y en (0, -7) y la $m = 0$
19. **– 4 y = 0**
    sol. Recta horizontal coincide con el eje x , y la $m = 0$
20. **– 5x = 0**
    sol. Recta vertical coincide con el eje y , y la $m\ \ es\ indefinida$
21. **4 x – 6 y = -36**
    sol. Con el eje y (0, 6) y con el eje x (-9, 0) y la $m = \frac{2}{3}$

10. **8 x - 6 y = x + 3 y**
    sol. Con el eje y (0, 0) y con el eje x (0, 0) y la $m = \frac{7}{9}$ es una recta que pasa por el origen
11. **4 x – 8 y = 0**
    sol. Con el eje y (0, 0) y con el eje x (0, 0) y la $m = \frac{1}{2}$ es una recta que pasa por el origen
12. **– 2 x + 3 y = - 18**
    sol. Con el eje y (0, -6) y con el eje x (9, 0) y la $m = \frac{2}{3}$
13. **5 x + 3 y – 10 = 3 x – 3 y + 10**
    sol. Con el eje y (0,$\frac{20}{6}$) y con el eje x (10, 0) y la $m = -\frac{1}{3}$

II En los siguientes ejercicios calcule la pendiente m del segmento de línea que une los 2 puntos

1. (2, - 8) y (5, 10)
   sol. la m =6
2. (-3, 20) y (-5, 18)
   sol. la m =1
3. (6, 8) y (10, -16)
   sol. la $m = -6$
4. (-2, -8) y (-6, -20)
   sol. la $m = 3$
5. (8, 3) y (-16, 3)
   sol. la $m = 0$
6. (-6, 20) y (-6, 12)
   sol. la m $indefinida$
7. (a, b) y (-a, -b)
   sol. la $m = \frac{b}{a}$
8. (-10, 40) y (-40, 130)
   sol. la $m = -3$

EJERCICIOS DE RECTAS

Hallar las ecuaciones de las rectas con las condiciones dadas:

1. **Pendiente 3 y pasa por el punto (-2, 7). Sol. $y = 3x - 13$**
2. **Pendiente -4/3 y pasa por el punto (-1, 7). Sol. $y = -\frac{4}{3}x - \frac{17}{3}$**
3. **Pasa por los puntos (-2, 6) y (3,-5). Sol. $y = -\frac{11}{5}x + \frac{8}{5}$**
4. **Pendiente 0 y pasa por el punto (3, 8). Sol. $y = 8$**
5. **Pasa por los puntos (8,-2) y (7,-2). Sol. $y = -2$**
6. **Pendiente 0 e intersección con y igual a -5 sol. $y = -5$**
7. **Pendiente -3 e intersección con y igual a cero sol. $y = -3x$**
8. **Hallar la pendiente y la intersección con y de la recta $2x + 7y + 1 = 0$**
   sol. $m = -\frac{2}{7}x$ $b = -\frac{1}{7}$ corta al eje y en (0, $-\frac{1}{7}$)
9. **Hallar ambas intersecciones de la recta $2x + 5y + 8 = 0$**
   sol. Con x (-4, 0) y con y (0, $-\frac{8}{5}$)

10. **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,-4) y es paralela a la recta x+5y - 3=0**
    sol. $\boldsymbol{x + 5y + 19 = 0}$
11. **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,-2) y es perpendicular a la recta** $\boldsymbol{2x + 3y + 4 = 0}$
    sol. $\boldsymbol{3x - 2y - 13 = 0}$
12. **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-1,-3) y es paralela a la recta que pasa por los puntos (3, 2) y (5, 7).**
    Sol. $\boldsymbol{5x + 8y + 29 = 0}$
13. **Hallar la ecuación de la recta que pasa por (-5, 3) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (7, 0) y (-8, 1).**
    Sol: $\boldsymbol{15x - y + 78 = 0}$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE DOS INCOGNITAS

FORMA GENERAL $a_1 x + b_1 y = c_1$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

Donde a_1 , a_2 $son\ coeficientes\ de\ x$, b_1 , b_2 $son\ coefiecientes\ de\ y$, $y\ \ c_1 , c_2\ son\ los\ términos\ independientes$

Las gráficas de estas dos ecuaciones constan de dos líneas rectasen el plano xy , cualquier pareja de valores x , y que satisfacen a la vez a las ecuaciones deben corresponder a un punto (x, y) que está situado en ambas líneas.

Al resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas podemos obtener los siguientes resultados:

- Que tenga una sola solución (solución única).las rectas que se cruzan en un punto (x , y) , solo existe un punto (x, y) que satisface a ambas ecuaciones.
- Que tengan un número infinito de soluciones. las rectas son coincidentes (son rectas equivalentes). Existen un número infinito de puntos (x,y) que satisfacen a ambas ecuaciones.
- Que no tengan solución. (son rectas paralelas) . no existe ningún punto (x,y) que satisfacen a ambas ecuaciones .

EJERCICIOS. Resuelva los siguientes ejercicios

1) $300x + 400y = 2000$ $14x + 5y = 26$ **Sol. (4,2)**	7) $2x - 3y = 1$ $5x + 4y = 14$ **Sol. (2,1)**
2). $\frac{x-y}{3} = \frac{y-1}{4}$ $\frac{4x-5y}{7}$ = x - 7 $\boldsymbol{Sol.(8,5)}$	8) $2x - 3y = -2$ $3x + 4y = 27$ **sol. (1,6)**

3) $x + y = 3 \quad 3x - y = 1$ **sol (1,2)**	9) $2x + 2y = 9 \quad x + 3y = 10$ **Sol.** ($\frac{7}{4}$ - $\frac{11}{4}$)
4) $x + 2y = 4 \quad 3x + 6y - 8 = 0$ **El sistema no tiene solución**	10) $3x + 5y = 12 \quad 4x - 3y = -13$ **sol. (-1,3)**
5) $2x - 3y = 6 \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$ **Las ec. Son iguales , son idénticas , las dos líneas coinciden , las ec. Son equivalentes**	11) $2x - y = 3 \quad y = 5 - 3x$ **Sol.** ($\frac{8}{5}$ - $\frac{1}{5}$)
6) $x - y = 1 \quad 2x + 3y + 8 = 0$ **sol. (-1,-2)**	12) $7x - 8y = 4 \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3$ **sol. (4,3)**
13) $5x - 7y + 2 = 0 \quad 15x - 21y = 7$ **Sol. No tiene solución son rectas paralelas**	21) $x + y = 3 \quad y + z = 5 \quad x + z = 4$ **sol. (1, 2, 3)**
14) $x + 2y = 4 \quad 3x + 6y = 12$ **infinitas soluciones**	22) $x + 2y = 1 \quad 3y + 5z = 7$ $2x - y = 7$ **sol. (3, -1, 2)**
15) $2x + 3y = 29 \quad 3x - y = 5$ **sol. (4,7)**	23) $x + y + z = 6 \quad 2x - y + 3z = 9 \quad -x + 2y + z = 6$ **sol. (1,2,3)**
16) $5x - 3y = 8 \quad -10x + 6y = -16$ **No tienen solución, son rectas paralelas**	24) $x + 3y + 4z = 1 \quad 2x + 7y + 3z = -7$ $3x + 10y + 8z = -3$ **Sol. (-29, 6, 3)**
17) $9x - 6y = 7 \quad -6x + 4y = 11$ **No tienen solución, son rectas paralelas**	
18). $18x + 4y = 6 \quad 15x + 20y = 5$ **Sol. (3, -2)**	
19) $4x + y = 17 \quad 5x + 2y = 19$ **Sol. (5, -3)**	
20) $3x + 11y = 128 \quad 8x - 7y = 46$ **sol. (12.86, 8.12)**	

ALGUNAS APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

CALCULO DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO DE LA EMPRESA Y DEL MERCADO .

EL PUNTO DE EQUILIBRIO DE LA EMPRESA.

- Es aquel punto en el que la empresa no gana ni pierde.
- Es aquel punto donde los Ingresos o ventas totales son iguales a los costos totales.
- Es aquel punto donde la Utilidad Total es cero.

Si **x** es el numero de unidades producidas o vendidas y **p** es el precio de venta del artículos, entonces:

la ecuación de Ingresos o ventas totales esta dada por : $y_{IT} = p\,x$

la ecuación de costos totales por : $y_{CT} = CF + CV\,(x)$

Donde CF son los costos fijos y CV es el costo variable por unidad .

Para la determinación del punto de equilibrio debemos en primer lugar **conocer los costos fijos y variables de la empresa**; entendiendo por costos variables aquellos que cambian en proporción directa con los volúmenes de producción y ventas, por ejemplo: materias primas, mano de obra a destajo, comisiones, etc.

Los costos fijos son aquellos que no cambian en proporción directa con las ventas y cuyo importe y recurrencia es prácticamente constante, como son la renta del local, los salarios, las depreciaciones, amortizaciones, etc. Además debemos conocer el precio de venta de él o los productos que fabrique o comercialice la empresa, así como el número de unidades producidas.

La ecuación de Utilidad o perdida Total está dada por: $y_{UToPT} = x(\,p - CV\,) - CF$

FORMAS PARA CALCULAR EL PUNTO DE EQUILIBRIO DE UNA EMPRESA:

- Igualando la ecuación de Ingreso Total con la ecuación de Costos Totales $y_{IT} = y_{CT}$
- Igualando a cero la ecuación de Utilidad o perdida Total $y_{UToPT} = 0$

P.E. en unidades $= \dfrac{CF}{precio\ por\ unidad\ -\ CVpor\ unidad} = \ = \dfrac{CF}{p\ -\ CV}$

P.E. en pesos $= \dfrac{costos\ fijos}{1-\frac{costos\ variable\ totales}{ingresos\ o\ ventas\ totales}} = \dfrac{CF}{1-\frac{CVtotales}{IT}}$

Ejercicios:

1. Suponga que el costo total diario de producir x sillas esta dado por :
   $y_{CT} = 300 + 2.5(x)$

a) Si cada silla se vende a $ 4 ¿ Cuantas sillas se deberán vender para que la empresa este en su punto de equilibrio?
   Usando la ecuación de utilidad o perdida tenemos:
   $y_{UToPT} = x(4 - 2.5) - 300$
   en el punto de equilibrio la utilidad es cero por lo tanto , sustituimos $y_{UToPT} = 0$
   $0 = x(4 - 2.5) - 300$, despejando x tendremos que x = 200 sillas.

b) Si el precio se incrementa a $ 5 por silla . ¿ Cual será el nuevo punto de equilibrio?
   Usando la ecuación de utilidad o perdida tenemos $y_{UToPT} = x(5 - 2.5) - 300$
   en el punto de equilibrio la utilidad es cero por lo tanto , sustituimos
   $y_{UToPT} = 0$ $0 = x(5 - 2.5) - 300$, despejando x tendremos que
   x = 120 sillas

c) Sea p pesos el precio fijado a cada silla , entonces los ingresos obtenidos por la venta de 150 sillas es $y_{IT} = 150\ p$ y el costo de producir 150 sillas es
   $y_{CT} = 300 + 2.5\ (150)$
   $y_{CT} = 300 + 375 = 675$

Con objeto de garantizar una situación de equilibrio debemos tener que : $y_{IT} = y_{CT}$
$150p = 675$ $p = \frac{675}{150}$ = $ 4.50

Por tanto el precio fijado para cada una de las sillas debe ser de $ 4.50 , con el fin de garantizar que no haya ganancias ni perdidas (en el peor de los casos) si al menos se venden 150 sillas.

2. El costo variable de fabricar una mesa es de $ 7 y los costo fijos son de $ 150 por dia . determine el costo total y_{CT} de fabricar x mesas al dia ¿ cuál es el costo de fabricar 100 mesas al día?.
   $\boldsymbol{sol.}$ $\boldsymbol{y_{CT} = 150 + 7(x)}$ $\boldsymbol{y_{CT} = 850}$
3. El costo de fabricar 100 cámaras a la semana es de $ 700 y el de 120 cámaras a la semana es de $ 800.
   a) Determine la ecuación de costo. $\boldsymbol{sol.}$ $\boldsymbol{y_{CT} = 200 + 5(x)}$
   b) ¿Cuales son los costos fijos y variables por unidad?
      $\boldsymbol{sol.}$ $\boldsymbol{CF = 200}$ $\boldsymbol{CV = 5}$
4. A una compañía le cuesta $ 75 producir 10 unidades de cierto artículo al día y $ 120 producir 25 unidades del mismo artículo al día.
   a) Determine la ecuación de costo.
   $\boldsymbol{sol.}$ $\boldsymbol{y_{CT} = 45 + 3(x)}$
   b)¿Cual es el costo de producir 20 artículos por día?
   $\boldsymbol{sol.}$ $\boldsymbol{y_{CT} = 105}$
   c) ¿Cuales son los costos fijos y variables por artículo?
      $\boldsymbol{sol.\ CF = 45}$ $\boldsymbol{CV = 3}$

5. El costo variable de producir cierto artículo es de $ 0. 90 Por unidad y los costos fijos son de $ 240 al día. El artículo se vende a $1.20 cada uno.
   a) ¿cuantos artículos deberá producir y vender para que la empresa esté en su punto de equilibrio?
   $\boldsymbol{sol.\quad x = 800\ unidades}$
6. El costo de producir x artículos esta dado por $y_{CT} = 600 + 2.8\,(x)$ y cada artículo se vende a $ 4.
   a) Encuentre el punto de equilibrio. $\boldsymbol{sol.\quad x = 800\ unidades}$
   b) Si se sabe que al menos 450 unidades se venderán. ¿ Cual debería ser el precio fijado a cada artículo para garantizar que no haya perdidas?
   $\boldsymbol{sol.\quad p = \$\,4.14}$
7. Un fabricante produce artículos a un costo variable de $ 0.85 cada uno y los costos fijos son de $ 280 al día. si cada artículo se puede vender a $1.10, determine el punto de equilibrio.
   $\boldsymbol{sol.\quad x = 1120\ artículos}$
8. En el ejercicio anterior , si el fabricante puede reducir el costo variable a $ 0.70 por artículo incrementando los costos fijos a $ 350 .¿ es ventajoso hacerlo asi?.
   $\boldsymbol{si\ porque\ vendería\ menos\ articulos\ para\ estar\ en\ su\ punto\ de\ equilibrio},$ **los artículos que tendría que vender para estar en su punto de equilibrio sería 875 artículos en lugar de 1120**
9. El costo de producir x artículos a la semana está dado por $y_{CT} = 1000 + 5\,(x)$ si cada articulo puede venderse a $ 7 , a) determine el punto de equilibrio . b) si el fabricante puede reducir los costos variables a $ 4 por articulo incrementando los costos fijos a $ 1200 a la semana ¿ le convendría hacerlo?.
   $a)\ \boldsymbol{sol.\quad x = 500\ artículos}$
   $\boldsymbol{b)\ si\ porque\ vendería\ menos\ articulos\ para\ estar\ en\ su\ punto\ de\ equilibrio},$
   los artículos que tendría que vender para estar en su punto de equilibrio sería 400 artículos en lugar de 500

EL PUNTO DE EQUILIBRIO DEL MERCADO.

Se dice que el mercado está en su punto de equilibrio, cuando la OFERTA es igual a la LA DEMANDA .

La definición de **la oferta es la cantidad de bien o servicio que el vendedor pone a la venta.** Este bien o servicio pueden ser bicicletas, horas de clases de conducir, caramelos o cualquier otra cosa que se nos ocurra.

La demanda es la cantidad de un bien o servicio que la gente desea adquirir. Casi todos los seres humanos del planeta demandan un bien o un servicio, oro, arroz, zumo de naranja, educación superior… No obstante lo más interesante de la oferta y la demanda es como interactúan la una con la otra.

Las Leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico. La cantidad x de cualquier artículo que será adquirido por los consumidores depende del precio en que el artículo esté disponible. Una relación que especifique la cantidad de un artículo determinado que los consumidores están dispuestos a comprar, a varios niveles de precios, se denomina LEY DE LA DEMANDA. La ley mas simple es una relación del tipo $y_d = mx + b$; donde y_d es el precio del artículo por unidad y m y b son constantes. la grafica de una Ley de demanda se llama **la curva de demanda**. Obsérvese que p se ha expresado en términos de x. estos nos permite calcular el nivel de precio en que cierta cantidad x puede venderse.

Si el precio y_d por unidad de un artículo aumenta, la demanda por el artículo disminuye, porque menos consumidores podrán adquirirlo, mientras que si el precio y_d disminuye (es decir, el artículo se abarata) la demanda se incrementará. En otras palabras la pendiente m de la relación de demanda $y_d = mx + b$ será negativa. de modo que la grafica de la ecuación tiene una inclinación que baja hacia la derecha.

Para calcular el punto de equilibrio del mercado en cantidad y precio , la ecuación de oferta se iguala a la ecuación de demanda

$$y_0 = y_d$$

Resolviendo esta igualdad, se obtiene el valor de las cantidades x en el punto de equilibrio del mercado y para calcular el precio de equilibrio del mercado, este valor de x se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones; es decir en la ecuación de la oferta o en la ecuación de la demanda .

Ejemplo:

Determine el punto de equilibrio del mercado en cantidad y precio de la oferta y la demanda siguiente

$$y_d = 25 - 2x \qquad y_o = 3x + 5$$

Solución: igualando la ecuación de oferta con la de demanda

$$y_0 = y_d$$

$3x + 5 = 25 - 2x$ $\qquad$ $3x + 2x = 25 - 5$ $\qquad$ $5x = 20$ $\qquad$ $x = \frac{20}{5} = 4$

, 4 es la cantidad en el punto de equilibrio del mercado y el precio de equilibrio se calcula sustituyendo este valor de $x = 4$, en la ecuación de oferta o en la de demanda, en este caso la vamos a sustituir en la ecuación de demanda $y_d = 25 - 2x$,
para $x = 4$, $y_d = 25 - 2(4)$ $\qquad$ $y_d = 25 - 8$ = 17 ,
17 representa el precio en el punto de equilibrio del mercado, entonces el punto de equilibrio del mercado está definido por P.E.M. $(4, 17)$

I. En las siguientes parejas de ecuaciones de oferta y demanda , calcule el punto de equilibrio del mercado , en cantidad y precio

1) $3y + 5x = 22$ $2y - 3x = 2$ **sol. (2,4)**	5) $4y + x = 50$ $6y - 5x = 10$ **sol. (10, 10)**
2) $5y + 2x = 100$ $y = \frac{4}{3}x + 10$ **sol. (25,30)**	6) $5y + 8x = 80$ $3x = 2y - 1$ **sol.** $\left(\frac{155}{21}, \frac{486}{42}\right)$
3) $2y + 3x = 100$ $y = \frac{1}{10}x + 2$ **sol. (30,5)**	7) $y = 25 - 2x$ $y = 3x + 5$ **sol. (4, 17)**
4) $3y + 5x = 200$ $7y - 3x = 56$ **sol. (28,20)**	8) $y = x + 5$ $3y + 4x = 36$ **sol. (3, 8)**

II. Un comerciante puede vender diariamente 200 artículos de cierto bien a \$ 30 por por cada artículo, y 250 artículos en \$ 27 , la ecuación de oferta es $\boldsymbol{6y = x + 48}$

a) Determine la ecuación de la demanda.

b) El punto de equilibrio del mercado, en cantidad y precio.

METODOS DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE DOS INCOGNITAS (2 VARIABLES) Y TRES INCOGNITAS (3VARIABLES)

- POR SUSTITUCIÓN.
- EL METODO DE LA SUMA
- POR IGUALACIÓN
- DETERMINANTES

SISTEMAS DE ECUACIONES DE DOS INCOGNITAS

Tienen la forma : $a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$

Por ejemplo , las parejas de ecuaciones :

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ 4x - 3y &= 6 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

Representan sistemas de ecuaciones lineales de dos incognitas.

Por ejemplo . resolver el siguiente sistemas de ecuaciones:

a) $4x + y = 13$
b) $-2x + 3y = -17$

Usando el método por SUSTITUCIÓN:

Es necesario seguir los siguientes pasos:

1) Si es necesario, despejar una variable de una de las ecuaciones , de preferencia una variable cuyo coeficiente sea 1.
2) Sustituir la variable despejada en la ecuación 1 en la otra ecuación y resolver la ecuación resultante.
3) Determinar el valor de la primera variable sustituyendo el valor que se determinó en el paso 2, en cualquiera de las dos ecuaciones que contienen la s dos variables.
4) Comprobar la solución en las dos ecuaciones originales.

Despejando y en la ecuación **a)** $y = -4x + 13$ este valor lo sustituimos en la ecuación b) $-2x + 3(-4x + 13) = -17$

Quitando paréntesis $-2x - 12x + 39 = -17$ y simplificando la expresión

$-14x + 39 = -17$ despejando x , tenemos $-14x = -17 - 39$

$-14x = -56$; $x = \frac{-56}{-14} = 4$

Para calcular y , sustituimos a $x = 4$ en la ecuación a) $4x + y = 13$ y simplificamos $4(4) + y = 13$ $16 + y = 13$ $y = 13 - 16 = -3$

La solución es $x = 4$ $y = -3$, o sea $(4, -3)$

Si hubiéramos graficado las ecuaciones del sistema, las rectas se intersectarían en el punto $(4, -3)$.

Para comprobar que esta solución satisface cada una de las ecuaciones, sustituimos $x = 4$ y $y = -3$ en el sistema y simplificamos

$4x + y = 13$ $4(4) + (-3) = 13$ $16 - 3 = 13$ $13 = 13$	$-2x + 3y = -17$ $-2(4) + 3(-3) = -17$ $-8 - 9 = -17$ -17= -17
Como el para ordenado $(4, -3)$ satisface cada ecuación del sistema , la solución $(4, -3)$ es correcta	

Usando el MÉTODO DE LA SUMA. En el método de la suma se combinan las ecuaciones del sistema de tal modo que se eliminen los términos donde interviene una de las dos variables.

Es necesario seguir los siguientes pasos:

1) Escribir ambas ecuaciones del sistema en su forma general.
2) Multiplicar los términos de una o ambas ecuaciones por constantes elegidas para que los coeficientes de x o de y, solo difieran en el signo.
3) Sumar las ecuaciones y, si es posible, resolver la ecuación que resulta.
4) Sustituir el valor en el paso 3 en cualquiera de las ecuaciones originales y despejar la variable restante.
5) Enunciar la solución que se obtuvo en los pasos 3 y 4.
6) Comprobar la solución en ambas ecuaciones originales.

Ejemplo resolver el siguiente sistema de ecuaciones

a) $\boldsymbol{4x + y = 13}$

b) $\mathbf{-2x + 3y = -17}$

Para eliminar la variable x multiplicamos por 2 la segunda ecuación para que los coeficientes de x difieran en signo.

a) $4x + y = 13$

b) $2(-2x + 3y) = (-17)2$

Quitando paréntesis en la ecuación dos , y simplificando la ecuación , tenemos
a) $4x + y = 13$
b) $-4x + 6y = -34$
cuando se suman estas dos ecuaciones , desaparecen los términos donde interviene x
y llegamos a
$7\,y = -21$
$y = \frac{-21}{7} = -3$ para determinar x , sustituimos a y por -3 en cualquiera de las ecuaciones originales y despejamos x de lo que obtengamos , por lo tanto, sustituimos la

$y = -3$ en la ecuación a) $4x + y = 13$ tenemos $4x + (-3) = 13$ $4x - 3 = 13$

$4x = 13 + 3$ $4x = 16$ $x = \frac{16}{4} = 4$

La solución es $x = 4$ y $y = -3$, o bién $(4, -3)$

Para comprobar que esta solución satisface cada una de las ecuaciones, sustituimos $x = 4$ y $y = -3$ en el sistema y simplificamos.

Usando el método por IGUALACIÓN: este método consiste en despejar la misma variable en las dos ecuaciones, posteriormente se igualan esos dos resultados y se resuelve la ecuación resultante

Ejemplo resolver el siguiente sistema de ecuaciones
a) $\boldsymbol{4x + y = 13}$
b) $-2x + 3y = -17$

despejando la x en ambas ecuaciones

$\boldsymbol{4x + y = 13}$ $4x = 13 - y$ $\mathbf{x = \frac{13 - y}{4}}$

$-2x + 3y = -17$ $-2x = -17 - 3y$ $\mathbf{x = \frac{-17 - 3y}{-2}}$ **este valor de x se iguala con el otro valor de x**

$\mathbf{\frac{13 - y}{4} = \frac{-17 - 3y}{-2}}$ el siguiente paso despejar el valor de y

$-2(13 - y) = 4(-17 - 3y)$ quitando paréntesis $-26 + 2y = -68 - 12y$

$2y + 12y = -68 + 26$ $14y = -42$ $\mathbf{y = \frac{-42}{14} = -3}$ **para determinar el valor de** x el valor de $\mathbf{y = -3}$ **se sustituye en** $\mathbf{x = \frac{13 - y}{4}}$ $\mathbf{x = \frac{13 - (-3)}{4}}$

$$\mathbf{x = \frac{13 + 3}{4} = \frac{16}{4} = 4}$$

El método por DETERMINANTES. El concepto de determinante está relacionado con el concepto de matriz.

Un determinante es un número que está relacionado con una matriz cuadrada. Para toda matriz cuadrada A, el símbolo |**A**| representa su determinante de matriz A.

Valor de un determinante 2 x 2 .

Si a, b, c y d son números, el determinante de la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$

El determinante de una matriz 2 x 2 es el número que se obtiene con el producto de los números de la diagonal principal menos el producto de los números de la otra diagonal.

REGLA DE CRAMER.

El método que se emplea para resolver sistemas de ecuaciones usando determinantes se le llama REGLA DE CRAMER, en honor del matemático del siglo XVIII Gabriel Cramer. Para desarrollar dicha regla consideramos el sistema

REGLA DE CRAMER para resolver dos ecuaciones con dos variables.

La solución del sistema:

$$\boldsymbol{ax + by = \mathrm{e}}$$
$$\boldsymbol{c}\mathbf{x + dy = f}$$

En el cual $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{y}$ son variables y a, b, c, e y f son constantes. es **:**

$$\boldsymbol{x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}}$$

Ejemplo usar la regla de cramer para resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

a) $\boldsymbol{4x + y = 13}$

b) $-2x + 3y = -17$

$$\boldsymbol{x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{bmatrix} 13 & 1 \\ -17 & 3 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(13)(3)-(-17)(1)}{(4)(3)-(-2)(1)} = \frac{39+17}{12+2} = \frac{56}{14} = 4}$$

y $$\boldsymbol{y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 13 \\ -2 & -17 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(4)(-17)-(-2)(13)}{(4)(3)-(-2)(1)} = \frac{-68+26}{12+2} = \frac{-42}{14} = -3}$$

la solución de este sistema es $(4, -3)$

Arreglo de signos para un determinante 3X3

+	-	+
-	+	-
+	-	+

Valor de un determinante 3X3 .

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad a_1\ es \begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad b_1\ es \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad c_1\ es \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}}$$

Ejemplo evaluar el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{- 3}\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{- 2}\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{= 1[(1)(3)-(2)(3)] - 3[(2)(3)-(1)(3)] - 2[(2)(2)-(1)(1)]}$$

$$\boldsymbol{= 1[3-6] - 3[6-3] - 2[4-1] = 1(-3) - 3(3) - 2(3) = -3-9-6 = -18}$$

REGLA DE CRAMER para resolver tres ecuaciones con tres variables.

La solución del sistema:

$$\mathbf{ax + by + cz = j}$$

$$\mathbf{dx + ey + fz = k}$$

$$\mathbf{gx + hy + iz = l}$$

En el cual $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{z}$ son variables y $a, b, c, d,\ e,\ f, g. h. i\ , j\ , k, l$ son constantes.
es :

$$\boldsymbol{x = \frac{D_x}{D}} \quad , \quad \boldsymbol{y = \frac{D_y}{D}} \quad , \quad \boldsymbol{z = \frac{D_z}{D}} \quad \textbf{en donde}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{D_x} = \begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{D_y} = \begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{D_z} = \begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}$$

Ejemplo. Resolver , mediante la regla de cramer , el sistema

$$\mathbf{2x + y + 4z = 12}$$
$$\mathbf{x + 2y + 2z = 9}$$
$$\mathbf{3x - 3y - 2z = l}$$

Solución:

$$\mathbf{x = \frac{D_x}{D}} \qquad \mathbf{x} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{j} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{k} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{l} & \mathbf{h} & \mathbf{i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i} \end{vmatrix}} = \frac{j\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} k & f \\ l & i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} k & e \\ l & h \end{bmatrix}}{a\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{12\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} - \mathbf{1}\begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} + \mathbf{4}\begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}}{2\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} - \mathbf{1}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} + \mathbf{4}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{12\lfloor(2)(-2)-(-3)(2)\rfloor - 1\lfloor(9)(-2)-(1)(2)\rfloor + 4\lfloor(9)(-3)-(1)(2)\rfloor}}{\mathbf{2\lfloor(2)(-2)-(-3)(2)\rfloor - 1\lfloor(1)(-2)-(3)(2)\rfloor + 4\lfloor(1)(-3)-(3)(2)\rfloor}}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{12\lfloor -4+6\rfloor - 1\lfloor -18-2\rfloor + 4\lfloor -27-2\rfloor}}{\mathbf{2\lfloor -4+6\rfloor - 1\lfloor -2-6\rfloor + 4\lfloor -3-6\rfloor}} = \frac{\mathbf{12\lfloor 2\rfloor - 1\lfloor -20\rfloor + 4\lfloor -29\rfloor}}{\mathbf{2\lfloor 2\rfloor - 1\lfloor -8\rfloor + 4\lfloor -9\rfloor}} = \frac{\mathbf{24+20-116}}{\mathbf{4+8-36}}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{-72}{-24} = 3}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{D_y}{D}} \qquad \boldsymbol{y} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{l} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i} \end{vmatrix}} = \frac{a\begin{bmatrix} k & f \\ l & i \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} d & k \\ g & l \end{bmatrix}}{a\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{2\begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} - \mathbf{12}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} + \mathbf{4}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}}{2\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} - \mathbf{1}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} + \mathbf{4}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{2\lfloor(9)(-2)-(1)(2)\rfloor-12\lfloor(1)(-2)-(3)(2)\rfloor+4\lfloor(1)(1)-(3)(9)\rfloor}{2\lfloor(2)(-2)-(-3)(2)\rfloor-1\lfloor(1)(-2)-(3)(2)\rfloor+4\lfloor(1)(-3)-(3)(2)\rfloor}}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{2\lfloor-18-2\rfloor-12\lfloor-2-6\rfloor+4\lfloor2-27\rfloor}{2\lfloor-4+6\rfloor-1\lfloor-2-6\rfloor+4\lfloor-3-6\rfloor} = \frac{2\lfloor-20\rfloor-12\lfloor-8\rfloor+4\lfloor-26\rfloor}{2\lfloor2\rfloor-1\lfloor-8\rfloor+4\lfloor-9\rfloor} = \frac{-40+96-104}{4+8-36}}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{-48}{-24} = 2}$$

$$\boldsymbol{z = \frac{D_z}{D}} \qquad \boldsymbol{z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} \\ \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \mathrm{g} & \mathrm{h} & \mathrm{i} \end{vmatrix}} = \frac{a\begin{bmatrix} e & k \\ h & l \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} d & k \\ g & l \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}}{a\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 9 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{2\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{9} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} \end{bmatrix} - \mathbf{1}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix} + \mathbf{12}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}}{2\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} - \mathbf{1}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} + \mathbf{4}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{z = \frac{2\lfloor(2)(1)-(3)(9)\rfloor-1\lfloor(1)(1)-(3)(9)\rfloor+12\lfloor(1)(-3)-(3)(2)\rfloor}{2\lfloor(2)(-2)-(-3)(2)\rfloor-1\lfloor(1)(-2)-(3)(2)\rfloor+4\lfloor(1)(-3)-(3)(2)\rfloor}}$$

$$\boldsymbol{z = \frac{2\lfloor2+27\rfloor-1\lfloor1-27\rfloor+12\lfloor-3-6\rfloor}{2\lfloor-4+6\rfloor-1\lfloor-2-6\rfloor+4\lfloor-3-6\rfloor} = \frac{2\lfloor29\rfloor-1\lfloor-26\rfloor+12\lfloor-9\rfloor}{2\lfloor2\rfloor-1\lfloor-8\rfloor+4\lfloor-9\rfloor} = \frac{58+26-108}{4+8-36}}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{-24}{-24} = 1}$$

la solución de este sistema es $(3, 2, 1)$

Si todos los determinantes son ≠ 0, el sistema es consistente, pero sus ecuaciones son dependientes.

Si $D = 0$ y D_x o D_y son distintos de cero , el sistema es inconsistente.

Un sistema de ecuaciones tiene tres posibilidades: una única solución, ninguna solución o una **infinidad de soluciones.**

Es consistente cuando es un sistema de ecuaciones de igual número de incógnitas y de ecuaciones con determinante distinto de cero.

Es inconsistente cuando no tiene ninguna solución.

Es dependiente cuando se pueden obtener algunas de las incógnitas en función de otras, lo cual ocurre cuando hay infinidad de soluciones

Usa la regla de cramer para resolver, si es posible los sistemas de ecuaciones de los ejercicios siguientes:

1. $x+y=6$ $x-y=2$ **sol (4,2)**	**2.** $2x+y=1$ $x-2y=-7$ **Sol. (-1,3)**
3. $2x+3y=0$ $4x-6y=-4$ **Sol.** $(\frac{-1}{2},\frac{1}{3})$	**4.** $y=\frac{-2x+1}{3}$ $3x-2y=8$ **Sol.** $(2,-1)$
5. $y=\frac{11-3x}{2}$ $x=\frac{11-4y}{6}$ **Sol. No hay solución**	**6.** $x=\frac{5y-4}{2}$ $y=\frac{3x-1}{5}$ **Sol.** $(5,\frac{14}{5})$
7. $x+y+z=4$ $x+y-z=0$ $x-y+z=2$ **Sol.** $(1,1,2)$	**8.** $x+y+2z=7$ $x+2y+z=8$ $2x+y+z=9$ **Sol.** $(3,2,1)$
9. $2x+y-z=1$ $x+2y+2z=2$ $4x+5y+3z=3$ **Sol. No tiene solución**	**10.** $2x+3y+4z=6$ $2x-3y-4z=-4$ $4x+6y+8z=12$ **Sol. el sistema es inconsistente**
11. $x+y=1$ $\frac{1}{2}y+z=\frac{5}{2}$ $x-z=-3$ **Sol.** $(-2,3,1)$	**12.** $2x+y+z=0$ $x-y+z=10$ $x+2y-z=-1$ **Sol.** $(\frac{28}{3},\frac{-29}{3}-9)$