INTRODUCCIÓN A LAS DERIVADAS

Expresión A $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

CON ESTA EXPRESIÓN SE CALCULA:

a) La pendiente (m) de la recta secante a la función $y = f(x)$ al cambiar $x\ de\ un\ valor\ x_1\ a\ un\ valor\ x_2.$
b) La velocidad o cambio promedio de la función $y = f(x)$ al cambiar $x\ de\ un\ valor\ x_1\ a\ un\ valor\ x_2.$
c) El cociente general de incrementos ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$) de la función $y = f(x)$ al cambiar $x\ de\ un\ valor\ x_1\ a\ un\ valor\ x_2.$

Expresión B $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

esta expresión representa la formula general de derivación

CON ESTA EXPRESIÓN SE CALCULA:

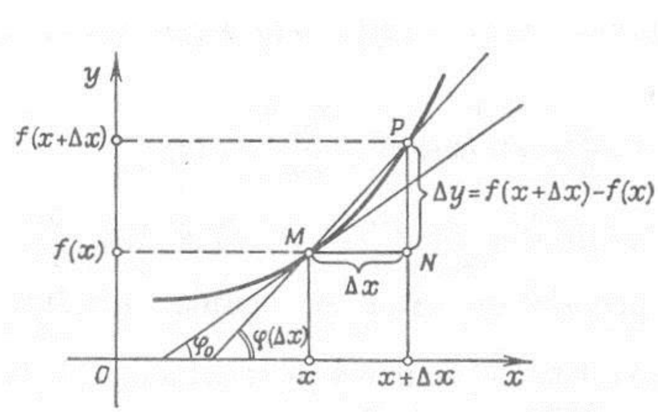
a) La pendiente (m) de la recta tangente a la función $y = f(x)$ en cualquier valor de x.
b) La velocidad o cambio instantáneo de la función $y = f(x)$ en cualquier valor de x.
c) La derivada de la función $y = f(x)$ en cualquier valor de x.

Con la expresión A se analiza la función en un intervalo de valores de x ($de\ x_1\ a\ x_2$), es decir, lo que pasa con el valor promedio de la función entre dos puntos, mientras que con la expresión B se analiza que pasa con el valor de la función en un punto determinado de x.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m \quad pendiente\ de\ una\ recta\ secante$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = m \quad pendiente\ de\ una\ recta\ tangente$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA



A la recta que toca dos puntos de una curva se le conoce como recta secante.

A la recta que toca un solo punto de una curva se le conoce como recta tangente

MANERAS DE REPRESENTAR LA DERIVADA

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, y' . $f'(x)$, D_x **Todas estas expresiones expresan la derivada de y con respecto a x.**

A la expresión $\frac{d(\ \ldots\ ).}{dx}$ que se lee como " la derivada de …………. con respecto a x" se le conoce como operador diferencial.

EJERCICIOS EN CADA UNA DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES

1. $y = f(x) = 6x^2$
   $Sol.$
   a)12
   b) 42
   c) -12
   d) 12

2. $y = f(x) = x^2 - 3x + 4$
   $Sol.$
   a)-1
   b) 4
   c) -5
   d)-1

3. $y = f(x) = -2x^2 - 5x$
   $Sol.$
   a)-9
   b) -19
   c) -1
   d)-9

4. $y = f(x) = 3x^2 - 2x$
   $Sol.$
   a) 4
   b) 19
   c) -3
   d)9

5. $y = f(x) = 2x^2 - 5x + 1$
   $Sol.$
   a) -1
   b) 9
   c) -9
   d) -1

6.- $y = f(x) = -5x^3$
   $Sol.$
   a) -35
   b) -195
   c) -15
   d) -15

7. $y = f(x) = -x^2 - 2x + 1$
   $Sol.$
   a) -4
   b) -9
   c) 0
   d) -4

8. $y = f(x) = 5x^2 - 3x + 10$
   $Sol.$
   a) 5
   b) 20
   c) -15
   d) 5

9. $y = f(x) = 3x^3 - 4x + 7$
   $Sol.$
   a) -9
   b) 99
   c) 5
   d) 5

Calcule:

a) La pendiente de la secante a la función al cambiar x de un valor de $x = -1$ a un valor $x = 3$.
b) La velocidad o cambio promedio de la función al cambiar x de un valor $x = 2$ a un valor $x = 5$.
c) La pendiente de la tangente a la función en $x = -1$.
d) La derivada de la función en $x = 1$.

FORMULAS PARA DERIVAR FUNCIONES ALGEBRAICAS

Si la función tiene la forma	Formula con la que deberán de empezar a derivar la función
1. $y = c \quad donde\ c\ es\ una\ constante$ Ejemplos de funciones que tienen esta forma : $y = 5$; $y = -3$; $y = -\frac{3}{5}$; $y = \sqrt{2}$	$\frac{dc}{dx} = 0$ la derivada de una función constante es 0
2. $y = x$	$\frac{dx}{dx} = 1$ $si\ \ y\ es\ igual\ \ a\ \ x\ , su\ derivada\ es\ igual\ a 1$
3. $y = cx$ Ejemplos de funciones que tienen esta forma : $y = 5x$; $y = -3x$; $y = -\frac{3}{5}x$; $y = \sqrt{2}\ \ x$	$\frac{dcx}{dx} = c$ **La derivada de una constante por x es igual a la constante**
4. $y = x^n$ Ejemplos de funciones que tienen esta forma ; $y = x^2$; $y = x^{-5}$; $y = x^{\frac{2}{3}}$	$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ **La derivada de** x^n es igual al producto de $n\ por\ la\ \ x$ elevada al exponente $n - 1$
5. $y = cx^n$ Ejemplos de funciones que tienen esta forma ; $y = 3x^2$; $y = -4x^{-5}$; $y = 6x^{\frac{2}{3}}$	$\frac{dcx^n}{dx} = ncx^{n-1}$ **La derivada de** cx^n es igual al producto de $n\ por\ \ c\ \ y\ por\ \ la\ \ x$ elevada al exponente $n - 1$
6. $y = u \pm v \pm w$ Ejemplos de funciones que tienen esta forma ; $y = 3x^2 - 4x^{-5} + 3$ $y = 6x^{\frac{2}{3}} + 2x - 5$	$\frac{d(u \pm v \pm w)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}$ Para derivar una función formada por términos que sean sumas o restas , se deriva cada uno de los términos , aplicando la fórmula de derivación que corresponda a cada termino
7. $y = (v)^n$ Ejemplos de funciones que tienen esta forma ; $y = (2x^3 + 3)^4$; $y = (-3x^5 + 7)^{-5}$	$\frac{d(v)^n}{dx} = n(v)^{n-1} . \frac{d(v)}{dx}$ Esta fórmula se aplicará cuando tengan un paréntesis elevado a un exponente $n \neq 1$
8. $y = c(v)^n$ Ejemplos de funciones que tienen esta forma : $y = 2(2x^3 + 3)^4$; $y = -7(-3x^5 + 7)^{-5}$	$\frac{dc(v)^n}{dx} = nc(v)^{n-1} . \frac{d(v)}{dx}$ Esta fórmula se aplicará cuando tengan una constante multiplicando a un paréntesis elevado a un exponente $n \neq 1$

9. $\boldsymbol{y = u.v}$

Ejemplos de funciones que tienen esta forma :

$$y = (2x-3)(2x^3+3)^4$$
$$y = (x-6)(2x^3+3)^{-3}$$

$$\frac{\boldsymbol{du.v}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{u}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}} + \boldsymbol{v}\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}$$

Esta fórmula se aplica cuando se tenga la multiplicación de una x que multiplica a otra x. Y el procedimiento es:

La primera (u) se multiplica por la derivada de la segunda$(\frac{dv}{dx})$ mas el producto de la segunda (v) por la derivada de la primera $(\frac{du}{dx})$

10. $\boldsymbol{y = \frac{u}{v}}$

$$\frac{\mathbf{d}\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{v}\ \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}} - \mathbf{u}\ \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dx}}}{(\mathbf{v})^2}$$

Ejemplos de funciones que tienen esta forma :

$$\boldsymbol{y} = \frac{(2x^3+3)^{-3}}{(x-6)}$$
$$y = \frac{3x^2 - x + 8}{x}$$

Esta fórmula se aplica cuando se tenga la división de una x entre otra x. Y el procedimiento es:

Lo de abajo (v) se multiplica por la derivada de lo de arriba $(\frac{du}{dx})$ menos el producto de lo de arriba (u) por la derivada de lo de abajo $(\frac{dv}{dx})$ todo dividido entre lo de abajo elevado al cuadrado$(\mathbf{v})^2$

11. $\boldsymbol{y = \frac{u}{c}}$

$$\frac{\mathbf{d}(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{c}})}{\mathbf{dx}} = \frac{\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}}{\mathbf{c}}$$

Ejemplos de funciones que tienen esta forma :

$$\boldsymbol{y = \frac{3x^2}{5}} \quad ; \quad \boldsymbol{y = \frac{(3x-4)^2}{5}}$$

Esta fórmula se aplica cuando la x aparece arriba y una constante abajo; y el procedimiento es :

Se deriva lo que está arriba con respecto a x , aplicando la fórmula que corresponda y se divide entre la constante.

12. $\boldsymbol{y = \frac{c}{(\mathbf{u})^{\mathbf{n}}}}$

$$\frac{\mathbf{d}(\frac{\boldsymbol{c}}{(\mathbf{u})^{\mathbf{n}}})}{\mathbf{dx}} = \frac{-(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{n})}{(\mathbf{u})^{\mathbf{n+1}}} \cdot \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}$$

Ejemplos de funciones que tienen esta forma :

$$\boldsymbol{y = \frac{3}{(x-3)^4}}$$
$$\boldsymbol{y = \frac{-5}{x^3}}$$

Esta fórmula se aplica cuando la x aparece abajo y una constante arriba; y el procedimiento es :

Menos el producto del valor de $\mathbf{c}$ por el valor de n ; entre $\mathbf{u}$ elevada a la $n+1$ este cociente multiplicado por la derivada de $\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}$

FORMULAS PARA DERIVAR ALGUNAS FUNCIONES TRASCENDENTES

FUNCIONES LOGARITMICAS

1. $y = \log u$

$$\frac{d\log u}{dx} = \frac{1}{u} \log e \frac{du}{dx}$$

Logaritmo decimal base 10
Ejemplo de funciones de este tipo:
$y = \log 3x^2$; $y = \log (2x^3 - 5)^4$

2. $y = \ln u$

$$\frac{d\ln u}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Logaritmo natural base e = 2.71
Ejemplo de funciones de este tipo:
$y = \ln 3x^2$; $y = \ln (2x^3 - 5x - 2)^2$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS

1. $y = sen\, u$

$$\frac{d sen\, u}{dx} = \cos u . \frac{du}{dx}$$

Ejemplo de funciones de este tipo:
$y = sen\, 3x^2$; $y = sen\, (2x^3 - 5x - 2)^2$

La derivada de la función $y = sen\, u$ es igual al $\cos u$ multiplicado por la derivada de u con respecto a x .

2. $y = \cos u$

$$\frac{d\cos u}{dx} = -sen\, u . \frac{du}{dx}$$

Ejemplo de funciones de este tipo:
$y = \cos 3x^2$; $y = \cos (2x^3 - 5x - 2)^2$

La derivada de la función $y = \cos u$ es igual al $- sen\, u$ multiplicado por la derivada de u con respecto a x .

3- $y = \tan u$

$$\frac{d\tan u}{dx} = sec^2 u . \frac{du}{dx}$$

Ejemplo de funciones de este tipo:
$y = \tan 3x^2$; $y = \tan (2x^3 - 5x - 2)^2$

La derivada de la función $y = \tan u$ es igual a al $sec^2 u$ multiplicada por la derivada de u con respecto a x .

4- $y = csc\, u$

$$\frac{d csc\, u}{dx} = -cscu . cotgu . \frac{du}{dx}$$

Ejemplo de funciones de este tipo:
$y = csc\, 3x^2$; $y = csc\, (2x^3 - 5x - 2)^2$

La derivada de la función $y = csc\, u$ es igual a la $-cscu$ multiplicada por la $cotgu$ por la derivada de u con respecto a x .

5.- $y = sec\, u$

$$\frac{d sec\, u}{dx} = sec\, u . \tan u . . \frac{du}{dx}$$

Ejemplo de funciones de este tipo:
$y = sec\, 3x^2$; $y = sec\, (2x^3 - 5x - 2)^2$

La derivada de la función $y = sec\, u$ es igual a la $secu$ multiplicada por la $\tan u$ por la derivada de u con respecto a x .

6.- $y = cotg\, u$

$$\frac{d cotgu}{dx} = -csc^2 u . \frac{du}{dx}$$

Ejemplo de funciones de este tipo:
$y = cotg\, 3x^2$; $y = cotg\, (2x^3 - 5x - 2)^2$

La derivada de la función $y = cotg\, u$ es igual a la $-csc^2 u$ multiplicada por la derivada de u con respecto a x .

FUNCIONES EXPONENCIALES

1.- $y = e^u$

$$\frac{de^u}{dx} = e^u.\frac{du}{dx}$$

Forma: base constante e exponente variables u
Ejemplo de funciones que tienen esta forma:
$y = e^{2x}$ $y = e^{sen3x}$

2.- $y = a^u$

$$\frac{da^u}{dx} = a^u.lna.\frac{du}{dx}$$

Forma: base constante a cualquier constante $a \neq e$, exponente variables u

Ejemplo de funciones que tienen esta forma:
$y = 2^{2x}$ $y = 5^{sen3x}$

3.- $y = u^v$

$$\frac{du^v}{dx} = u^v(\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + lnu.\frac{dv}{dx})$$

Forma: base variables u exponente variables v (una x elevada a otra x)

Ejemplo de funciones que tienen esta forma:
$y = x^{2x}$ $y = x^{sen3x}$
Cualquiera de las funciones trascendentes las podemos encontrar en las siguientes situaciones:

Dependiendo de la situación que se presente se aplicará la fórmula de derivación con la que se empezará a derivar dicha función.

Si la función tiene la forma Por ejemplo	**Formula con la que se empezará a derivar la función**
1.- $y = sen3x^2$ Ejemplo de otros casos que están en esta situación: $y = log\, 3x^2$; $y = ln\,(2x^3 - 5x - 2)^2$ $y = tan\, 3x^2$; $y = e^{sen3x}$	Se aplicará la formula directa de derivación que corresponda a la función que se tenga , en este caso se aplicara la formula directa de la función $sen\, u$: $\frac{dsen\, u}{dx} = cos\, u.\frac{du}{dx}$
2.- $y = (x + 2)sen3x^2$ Ejemplo de otros casos que están en esta situación: $y = xlog\, 3x^2$; $y = 2x.ln\,(2x^3 - 5x - 2)^2$ $y = e^{sen3x}tan\, 3x^2$; $y = 5x.e^{sen3x}$	Como se tiene una operación de multiplicación (es decir una x que multiplica a otra x), la formula de derivación con la que se empezará a derivar la función será la de $\frac{du.v}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
3.- $y = \frac{3x^2 - x + 8}{senx}$ Ejemplo de otros casos que están en esta situación: $y = \frac{3x^2 - x + 8}{cosx}$; $y = \frac{log\, 3x^2 + 8}{senx}$	Como se tiene una operación de división (es decir una x que divide a otra x),), la formula de derivación con la que se empezará a derivar la función será la de $\frac{d\frac{u}{v}}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{(v)^2}$

4.- $\boldsymbol{y = (sen\ 3x^5 + 4)^3}$

Ejemplo de otros casos que están en esta situación: $y = (sen\ 3x^5)^3$;
$y = (log\ 3x^5)^3$

Como se tiene u n paréntesis elevado a un exponente $n \neq 1$;), la formula de derivación con la que se empezará a derivar la función será la de

$$\boldsymbol{\frac{d(v)^n}{dx} = n(v)^{n-1}.\frac{d(v)}{dx}}$$

5.- $\boldsymbol{y = log\, 3x^2 + 3x - e^{sen3x}}$

Ejemplo de otros casos que están en esta situación:
$\boldsymbol{y = ln\, 3x^2 - sen3x + 5x}$
$\boldsymbol{y = 3x^2 - tan3x + 5x + x^{2x}}$

Como la función está formada de sumas y restas de términos ; la fórmula de derivación con la que se empezará a derivar la función será la de

$$\boldsymbol{\frac{d(u \pm v \pm w)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}}$$

Existen además funciones explicitas e implícitas, las Explicitas son aquellas donde la $\boldsymbol{y}$ está despejada, mientras que las Implícitas son aquellas en las cuales la $\boldsymbol{y}$ no está despejada.

DERIVADAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Para calcular la derivada de $\boldsymbol{y}$ **con respecto a** $\boldsymbol{x}$ $(\frac{dy}{dx})$ **de la funciones implícitas, basta usar la siguiente expresión .**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

La derivada de $\boldsymbol{y}$ **con respecto a** $\boldsymbol{x}$ $(\frac{dy}{dx})$ **es igual a menos las derivada parcial de la función con respecto a** $\boldsymbol{x}$ $-(\frac{\partial F}{\partial x})$ **entre la derivada parcial de la función con respecto a** $\boldsymbol{y}$ $(\frac{\partial F}{\partial y})$.

Para calcular la derivada parcial de la función con **respecto a** $\boldsymbol{x}$ **(** $\frac{\partial F}{\partial x}$) . se deriva solamente la variable $\boldsymbol{x}$ **, aplicando la fórmulas de derivación que corresponda y la variable** $\boldsymbol{y}$ **se toma como si fuera una constante (como si fuera un número).**

Por ejemplo sea la función $\boldsymbol{y^3 + xy - sen\ x = 5x - x^2}$ **calcular la** $\frac{\partial F}{\partial x}$

Lo primero que tenemos que hacer es igualar a cero la función, de tal manera que la función quedaría expresada como $\boldsymbol{y^3 + xy - sen\ x - 5x + x^2 = 0}$ **; entonces la**

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 + y - cosx - 5 + 2x = y - cosx - 5 + 2x$$

Mientras que para calcular la derivada parcial de la función con **respecto a y** ($\frac{\partial F}{\partial y}$), se deriva solamente la variable y **, aplicando la fórmulas de derivación que corresponda y la variable x se toma como si fuera una constante (como si fuera un número).**

Entonces la derivada parcial de la función anterior con respecto a y**, se calcula de la siguiente manera:**

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{x} - \mathbf{0} - \mathbf{0} + \mathbf{0} = 3\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{x}$$

De tal manera que la $\frac{dy}{dx}$ para la función implícita $\boldsymbol{y^3 + xy - sen\, x = 5x - x^2}$ **será**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{-(y - cosx - 5 + 2x)}{3\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{x}} = \frac{-y + cosx + 5 - 2x)}{3\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{x}}$$

EJERCICIOS I

ENCUENTRE LA DERIVADA EN CADA UNA DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

1.- $y = 2x(x^2 + 1)$

2.- $y = 3x^2(x - 1)$

3.- $y = (x - 1)(2x + 1)$

4.- $y = (2x + 3)(3x - 4)$

5).- $y = (3x + 1)(x^2 - 2)$

6),. $y = (x + 1)(2x^2 - 3x + 1))$

7).- $y = (x + 1)(x^3 - 1))$

8).- $y = (x^3 - 12x)(3x^2 + 2x)$

9).- $y = (x^3 - x^2 + x)(x^2$**+2)**

10).- $y = \frac{1}{5}x^3 + \left(x^2 + 1\right)\left(x^3 - x - 1\right) + 28$

11).- $y = \left(5x^2 + 1\right)\left(2\sqrt{x}\right) - 1)$

12.- $y = (1 + \sqrt{x})(2x^2 - 3)$

13.- $y = (x^2 - 5x + 2)(x - \frac{2}{x})$

14.- .- $y = (x^3 + 2x + 1)(2 + \frac{2}{x^2})$

15.- $y = \frac{1}{x+2}$

16- $y = \frac{3}{2x+4}$

17) $y = \frac{x-1}{2x+1}$

18 $y = \frac{1-2x}{1+3x}$

19) $y = \frac{1}{x^2+1}$

20) $y = \frac{x}{x^2+1}$

21) $y = \frac{x^2-4}{x+1}$

22) $y = \frac{x^3-2}{x^2+1}$

23 $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

24) $y = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$

25) $y = \frac{x^2+2}{x^2+x+1}$

26) $y = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x-2}$

27) $y = (2x^3 + x^2 + 1)^5$

28) $y = \sqrt{x^2} - 1$

29) $y = (2x - 3)^{\frac{3}{2}}$

30) $y = 5(2x^3 + x^2 + 1)^3$

31) $y = \frac{5}{3}(2x^3 - x^2 + 1)^3$

32) $y = \sqrt[5]{(2x^3 - 4x + 5)^3}$

33).- $y = sen\ 3x^5$

34) $y = tan\ 3x^5 + cos\ x - 5$

35 $y = tan(2x^3 + x^2 + 1)^5$

36) $y = e^{3x}(2x - 3)^{\frac{3}{2}}$

37) $y = \frac{ln5x}{2x^3+5}$

38) $y = (log(5x + 3))^4$

39) $y = x^{sen2x}$

40) $y = (sen\ 5x)^{(2x+3})$

41) $y = x^4 + ln5x^2 - (tanx^2)^{x^3}$

42) $y = csc\ 2x + x^4 - cotg\ 4x$

43) $2y^3 + xy - sen\ 2x = 5x - 3x^2$

44) $4x^4 - seny + e^{yx} = x^4 + y^3$

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Una función es creciente en un intervalo si la derivada es mayor que 0 en ese intervalo.

$\frac{dy}{dx} > 0$ **la derivada tiene signo positivo (+) entonces la función es creciente**

Una función es decreciente en un intervalo si la derivada es menor que 0 en ese intervalo.

$\frac{dy}{dx} < 0$ **la derivada tiene signo negativo (-) entonces la función es decreciente**

Una función es estacionaria en un punto cuando no crece ni decrece en ese punto y su derivada es igual a 0.

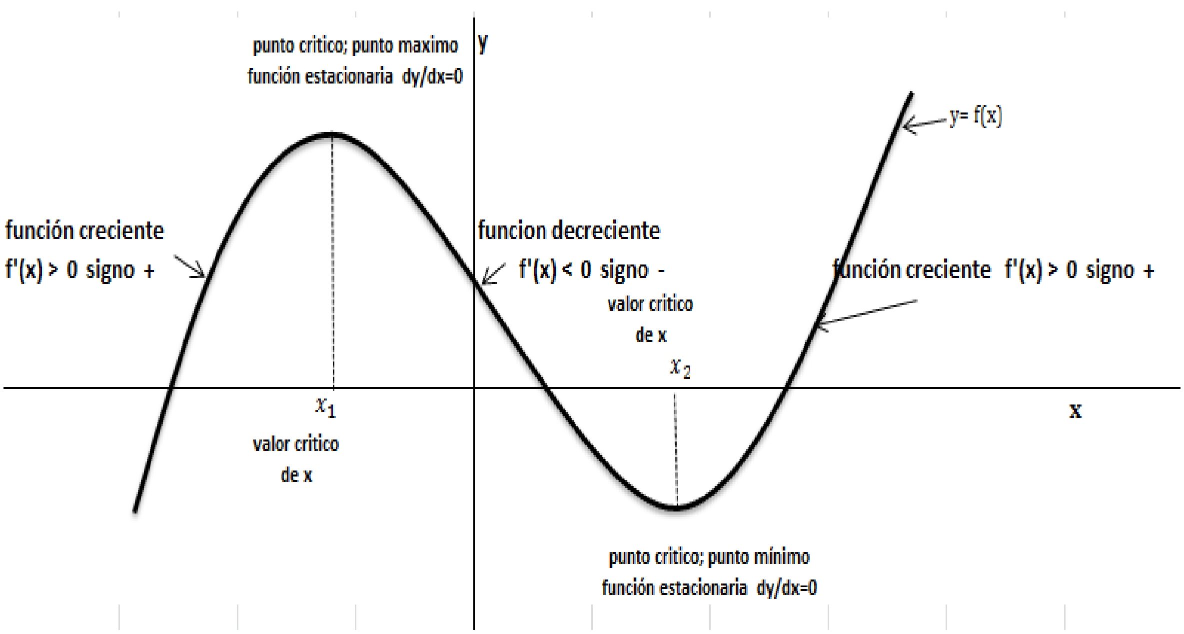
$\frac{dy}{dx} = 0$ **la derivada es igual 0, entonces la función es estacionaria**

A los puntos donde la función no crece ni decrece se le conocen como **puntos críticos**, y a los valores de x **en esos puntos se le conocen como valores críticos de x.**

Al punto crítico donde la función alcanza su máximo valor se le conoce como **punto máximo y al punto crítico donde la función alcanza su minino valor se le conoce como punto mínimo**

Si el signo de la derivada cambia de + a - al pasar por un valor critico de x se dice que la función tendrá un valor Máximo en ese valor crítico de x considerado.

Si el signo de la derivada cambia de - a + al pasar por un valor critico de x se dice que la función tendrá un valor Mínimo en ese valor crítico de x considerado.



I PROCEDIMIENTO PARA DETERMINAR:

- **LOS INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN ES CRECIENTE Y DECRECIENTE.**
- **LOS PUNTOS MÁXIMOS Y LOS PUNTOS MÍNIMOS , SI ES QUE LOS HAY.**
- **LOS VALORES DE x QUE SE REQUIEREN PARA GRAFICAR LA FUNCIÓN.**

Usando la derivada ($\frac{dy}{dx}$ primera derivada) .

1.- Se calcula la $\frac{dy}{dx}$.

2.- La $\frac{dy}{dx}$ se iguala a cero , resolviendo esta ecuación, se calculan los valores críticos de x

3.- los valores críticos de x se localizan en el eje de las x, se observa que lo valores críticos dividen al eje x en intervalos, posteriormente cada intervalo se analiza de la siguiente manera: se toma un valor de x de cada uno de los intervalos, cada valor de x se sustituye en la $\frac{dy}{dx}$ calculada en el primer paso.

Si al sustituir un valor de x en la $\frac{dy}{dx}$ y si el signo resulta positivo, esto indica que la función es **creciente** en el valor de x que se haya sustituido y también en todo el intervalo al que pertenece la x que se haya sustituido.

En caso contrario, es decir, Si al sustituir un valor de x en la $\frac{dy}{dx}$ y si el signo resulta negativo, esto indica que la función es **decreciente** en el valor de x que se haya sustituido y también en todo el intervalo al que pertenece la x que se haya sustituido.

Una vez analizada como es la función en cada uno de los intervalos, se analizan cada uno de los valores críticos, de la siguiente manera:

Se posiciona en cada uno de los valores críticos de x **calculados en el inciso 2 , se analizan los signos que tengan la derivada , tanto a la izquierda como a la derecha del valor critico que se esté tomando como base:**

Si el signo de la derivada $\frac{dy}{dx}$ cambia de + a - (de positivo a negativo) al pasar por el valor critico de x tomado como base, la función tendrá un valor Máximo en ese valor critico de x .

En caso contrario, es decir, **Si el signo de la derivada** $\frac{dy}{dx}$ cambia de - a + (de negativo a positivo) al pasar por el valor critico de x tomado como base, la función tendrá un valor Máximo en ese valor critico de x .

Para determinar cuántos valores se necesitan asignarle a x **cuando menos, para** trazar la gráfica de la función, se aplica la siguiente formula:

$Número\ de\ valores\ de\ x$	$=$	$numeros\ de\ valores\ criticos\ de\ x$	+	$numero\ de\ valores\ de\ x\ en\ los\ punto\ de\ inflexión$	+	**2**

Uno de estos 2 valores de x se toma a la izquierda del primer valor critico de x y el segundo valor de x se toma a la derecha del ultimo valor critico de x que se tenga.

Ejemplo: sea la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ calcular:

a) Los intervalos donde la función es creciente y decreciente
b) Los puntos máximos , los puntos mínimos, si es que los hay
c) Grafique la función

Solución:

1) **Se calcula la $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9$**

2) **La $\frac{dy}{dx} = 0$; esto es $3x^2 - 12x + 9 = 0$, hay que resolver esta ecuación, como es una ecuación de segundo grado que consta de los tres términos , usamos la formula general**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como $a = 3$ $b = -12$ y $c = 9$ $x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(3)(9)}}{2(3)} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6}$

Un valor de $x = \frac{12+6}{6} = \frac{18}{6} = 3$ y el otro valor de $x = \frac{12-6}{6} = \frac{6}{6} = 1$ estos valores de x , representan los valores críticos de x

3).- enseguida los valores críticos de $x = 1$ y $x = 3$ se localizan en el eje de las x, se observa que lo valores críticos dividen al eje x en 3 intervalos,

Numero	Intervalos	Valores de x tomados de cada intervalo
1	$(-\infty, 1)$	$x = 0$
2	$(1, 3)$	$x = 2$
3	$(3, +\infty)$	$x = 4$

ANÁLISIS DE CADA INTERVALO

Intervalo	Los valores de $x = 0$; $x = 2$ y $x = 4$ se sustituyen en la $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9$
$(-\infty, 1)$	$para\ x = 0$ la $\frac{dy}{dx} = 3(0)^2 - 12(0) + 9 = +9$ como el signo de la derivada es positivo (+) , la función es creciente en este intervalo
$(1, 3)$	$para\ x = 2$ la $\frac{dy}{dx} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3$ como el signo de la derivada es negativo (-) , la función es decreciente en este intervalo.

$(3,+\infty)$	$para\ x = 4$ la $\frac{dy}{dx} = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = +9$ como el signo de la derivada es positivo (+) , la función es creciente en este intervalo

Una vez analizada como es la función en cada uno de los intervalos, se analizan cada uno de los valores críticos, de la siguiente manera:

Se posiciona en cada uno de los valores críticos **de $x = 1$ y $x = 3$, se analizan los signos que tengan la derivada, tanto a la izquierda como a la derecha del valor crítico que se esté tomando como base:**

ANÁLISIS DE CADA VALOR CRITICO

Valor critico de x	
$x = 1$	Como el signo de la derivada cambia de + a - al pasar por el valor critico de $x = 1$, entonces la función tendrá un VALOR MÁXIMO EN $x = 1$
$x =$3	Como el signo de la derivada cambia de - a + al pasar por el valor critico de $x = 3$, entonces la función tendrá un VALOR MINIMO EN $x = 3$

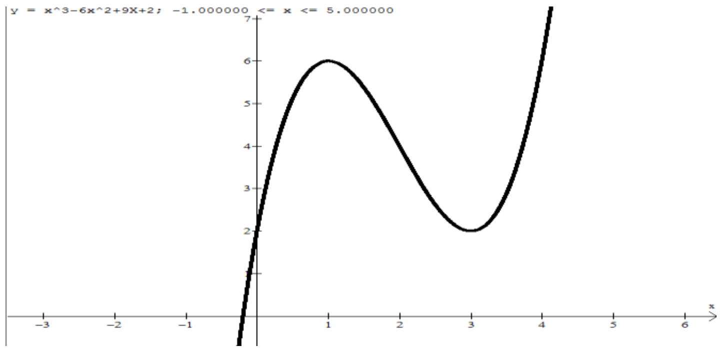
4.- PARA TRAZAR O GRAFICAR LA FUNCIÓN, $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ LE ASIGNAMOS A LA x los valores siguientes:

x	y
0	2
1	6
2	4
3	2
4	6

Los valores que se tomaron en consideración para trazar la gráfica de la función , son los valores de x que se seleccionaron de cada uno de los intervalos y de los valores críticos de x

Resumiendo:

a) **la función:**
   Es creciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(3,+\infty)$.
   Es decreciente en el intervalo $(1,3)$
b) **la función tiene un:**
   Punto Máximo en $(1,6)$
   Punto mínimo en $(3,2)$
c) **la gráfica**



EJERCICIOS II

UTILIZANDO EL PROCEDIMIENTO ANTERIOR

Calcule:

a) Los intervalos donde la función es creciente y decreciente
b) Los puntos máximos , los puntos mínimos, si es que los hay
c) Grafique la función

En cada uno de los siguientes ejercicios:

1. $y = 2x^2 + x + 1$
2. $y = x^2 - 3x$
3. $y = x^3 - 3x^2$
4. $y = x - x^3$
5. $y = x^3 - 3x^2 + 4$
6. $y = x^3 + 3x^2 + 1$
7. $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x - 2$
8. $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + 20$
9. $y = x^3 - 2x^2 + 4$
10. $y = x^3 - 4x^2 + 10$
11. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$
12. $y = 4x^2 - 12x + 7$
13. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 10$
14. $y = -x^2 + 3x + 4$
15. $y = 2x^2 - 3x + 4$
16. $y = x^3 - x$
17. $y = 6x^3 - 18x^2 + 12x - 15$
18. $y = 2x^2 + 3x + 7$
19. $y = -x^2 + 2x + 4$
20. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x - 20$
21. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$
22. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

DERIVADAS SUCESIVAS

Si $y = f(x)$

La $\frac{dy}{dx}$ representa la primera derivada de y con respecto a x ; si esta derivada la volvemos a derivar nuevamente, es decir.

La $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\boldsymbol{d^2}y}{d\boldsymbol{x^2}}$ tendremos la segunda derivada de y con respecto a x; si esta derivada la volvemos a derivar nuevamente,

La $\frac{d}{dx}\left(\frac{\boldsymbol{d^2}y}{d\boldsymbol{x^2}}\right) = \frac{\boldsymbol{d^3}y}{d\boldsymbol{x^3}}$ tendremos la tercera derivada de y con respecto a x. Hasta

.

.

.

$\frac{\boldsymbol{d^n}y}{d\boldsymbol{x^n}}$ la derivada $enésima\ de\ y\ con\ respecto\ a\ x.$

EJEMPLO.

Calcule todas las derivadas sucesivas de la función $\boldsymbol{y = x^3 + 3x^2 + 1}$

$\frac{dy}{dx} = 3\boldsymbol{x^2 + 6x}$ $\frac{\boldsymbol{d^2}y}{d\boldsymbol{x^2}} = 6x + 6$ $\frac{\boldsymbol{d^3}y}{d\boldsymbol{x^3}} = 6$ $\frac{\boldsymbol{d^4}y}{d\boldsymbol{x^4}} = 0$ a esta función se le puede calcular hasta una cuarta derivada $de\ y\ con\ respecto\ a\ x.$

APLICACIONES DE LA SEGUNDA DERIVADA $\frac{\boldsymbol{d^2y}}{\boldsymbol{dx^2}}$

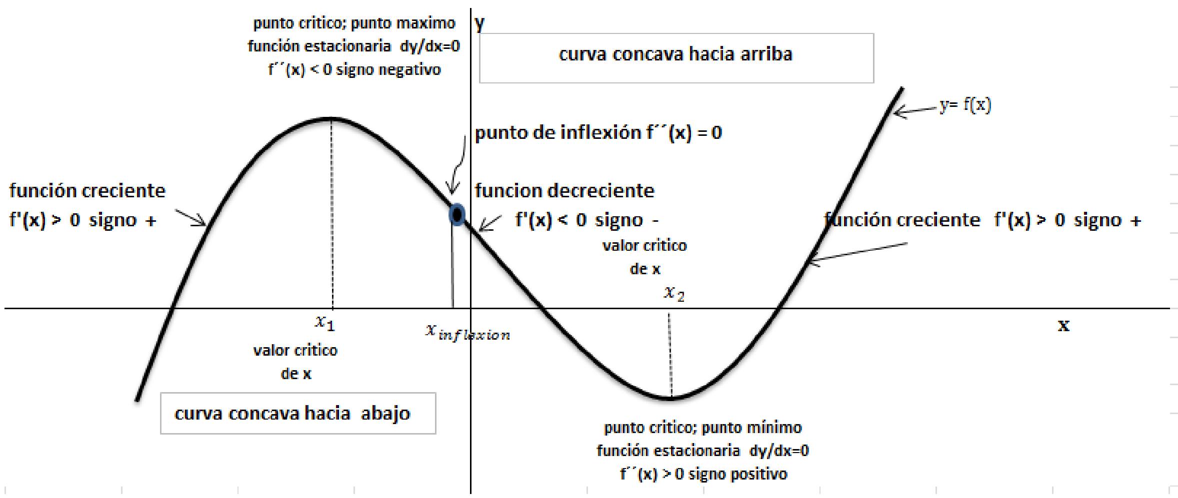
- **Se usa para determinar los valores de** x en los puntos de inflexión.
- **nos ayuda a determinar con su signo en qué valor crítico de $\boldsymbol{x}$ la función tiene un valor máximo o tiene un valor mínimo.**
- **Nos ayuda a determinar en qué intervalos la función es creciente o decreciente.**
- **Nos ayuda a Trazar la gráfica de la función.**

Un punto de inflexión es aquel punto donde la curva cambia de sentido su concavidad .

La función va a tener puntos de inflexión siempre que tenga valores máximos y minimos, en caso de que la función tenga solo un valor máximo y no tenga un valor minimo o que tenga solo un valor minimo y no tenga un valore máximo, esta función no tendrá puntos de inflexión.

COMO SE CALCULAN LOS VALORES DE x. EN LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN:

Se iguala a cero la segunda derivada $de\ y\ con\ respecto\ a\ x$, esto es $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, resolviendo esta ecuación se obtienen los valores de x en los puntos de inflexión.



II MÉTODO PARA DETERMINAR :

- **LOS INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN ES CRECIENTE Y DECRECIENTE.**
- **LOS PUNTOS MÁXIMOS, LOS PUNTOS MÍNIMOS Y LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN, SI ES QUE LOS HAY.**

Usando la primera derivada $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ y la segunda derivada $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

1.- Se calcula la $\frac{dy}{dx}$.

2.- La $\frac{dy}{dx}$ se iguala a cero , resolviendo esta ecuación, se calculan los valores críticos de $\boldsymbol{x}$

3. se calcula la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$.

4. cada uno de los valores críticos de $\boldsymbol{x}$ calculados en el inciso 2; se sustituyen en la $\frac{d^2y}{dx^2}$.

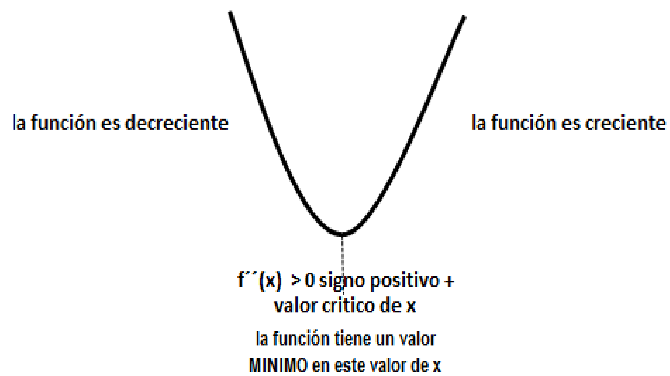
Si al sustituir un valor críticos de $\boldsymbol{x}$ en la $\frac{d^2y}{dx^2}$. Esta resulta con signo negativo, esto indica que la función tendrá un valor Maximo en el valor crítico de $\boldsymbol{x}$ que se haya sustituido en la $\frac{d^2y}{dx^2}$..

En caso contrario, es decir, Si al sustituir un valor críticos de x en la $\frac{d^2y}{dx^2}$. Esta resulta con signo positivo, esto indica que la función tendrá un valor Minimo en el valor crítico de x que se haya sustituido en la $\frac{d^2y}{dx^2}$.

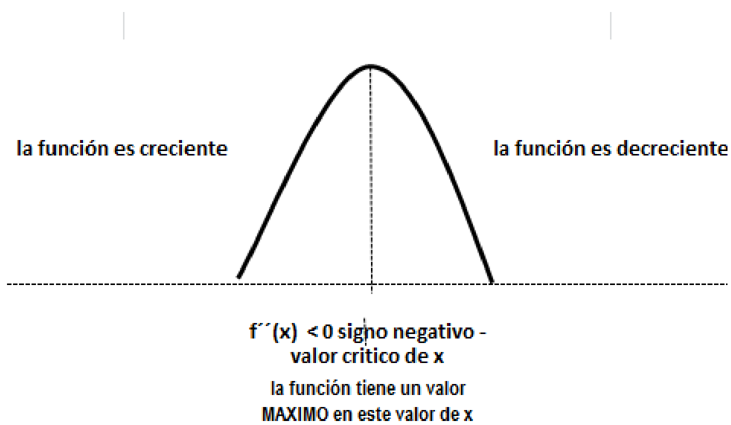
En este paso localizamos en qué valores críticos de x se encuentran los valores máximos y mínimos de la función.

Una vez identificados en que valores de x la función tiene sus valores máximos y/o mínimos se procede a determinar en qué intervalos la función es creciente y decreciente.

Si en un valor critico de x existe un valor mínimo de la función , esto nos indica que a la izquierda de ese valor crítico de x la función es decreciente y a la derecha es creciente .



Si en un valor critico de x existe un valor Máximo de la función, esto nos indica que a la izquierda de ese valor crítico de x la función es creciente y a la derecha es decreciente.



5. **Se calculan los valores de x en los puntos de inflexión, si es que los hay, para calcular estos valores de x**

Se iguala a cero la segunda derivada $\boldsymbol{de\ y\ con\ respecto\ a\ x}$, esto es $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, resolviendo esta ecuación se obtienen los valores de x en los puntos de inflexión.

6. **Para trazar la gráfica , se determina el número de los valores que se le van a asignar a x de acuerda a la siguiente expresión:**

$$\begin{matrix} \text{Número de} \\ \text{valores de } x \end{matrix} = \begin{matrix} \text{numeros de} \\ \text{valores} \\ \text{criticos de } x \end{matrix} + \begin{matrix} \text{numero de valores de } x \\ \text{en los punto de inflexión} \end{matrix} + 2$$

Ejemplo: sea la función $y = 3x^3 - 9x^2 + 2$ calcular:

a) Los intervalos donde la función es creciente y decreciente
b) Los puntos máximos , los puntos mínimos y los puntos de inflexión , si es que los hay
c) Grafique la función

Solución:

1) **Se calcula la primera derivada de $y\ con\ resoecto\ a\ x$, $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 18x$**
2) **La primera derivada se iguala a cero, $\frac{dy}{dx} = 0$; esto es $9x^2 - 18x = 0$, hay que resolver esta ecuación, como es una ecuación de segundo grado que consta de los términos en x^2 y el términos en x , usamos la del procedimiento de factorizar x, cuyas soluciones son $x = 0\ \ y\ x = \frac{-b}{a}$ como $a = 9\ \ y\ \ b = -18$, entonces $x = \frac{-(-18)}{9} = \frac{18}{9} = 2$**

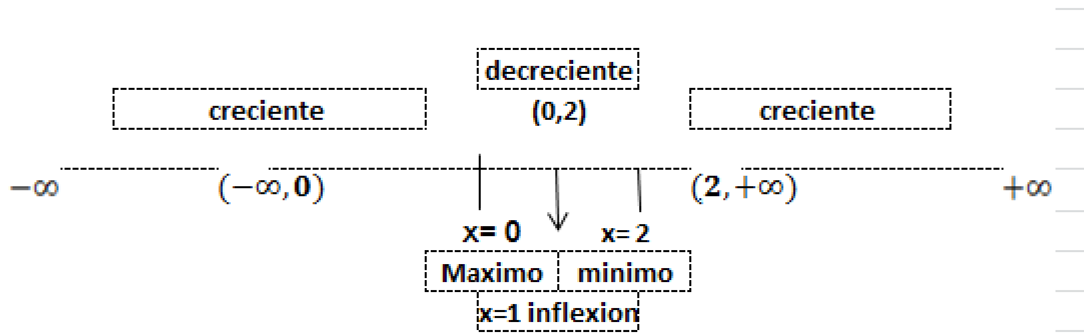
Los valores de $x = 0\ \ y\ \ x = 2$, representan los valores críticos de x.

3) **Se calcula la segunda derivada** $\frac{d^2y}{dx^2}$., esto es $\frac{d^2y}{dx^2} = 18x - 18$
4) **Los valores críticos de $x = 0\ \ y\ \ x = 2$ se sustituyen en la** $\frac{d^2y}{dx^2} = 18x - 18$

Para $x = 0$ la $\frac{d^2y}{dx^2} = 18(0) - 18 = -18$, como el signo de la $\frac{d^2y}{dx^2}$ es negativo, esto significa que la función tiene un valor Máximo en $x = 0$

Para $x = 2$ la $\frac{d^2y}{dx^2} = 18(2) - 18 = +18$ como el signo de la $\frac{d^2y}{dx^2}$ es positivo, esto significa que la función tiene un valor Mínimo en $x = 2$

5) **Se calculan los valores de x en los puntos de inflexión , para ello se toma la segunda derivada y se iguala a cero, de la siguiente manera** $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ $\quad 18x - 18 = 0$ resolviendo esta ecuación, se tiene que $x = \frac{18}{18} = 1$, **este valor de** x representa el valor de x en el punto de inflexión.



Resumiendo:

a) la función:

Es creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$.

Es decreciente en el intervalo $(0, 2)$

b) la función tiene un:

Punto Máximo en $(0, 2)$

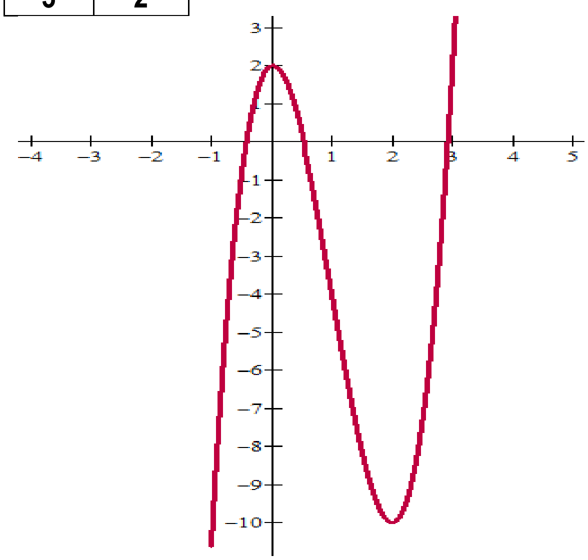
Punto mínimo en $(2, -10)$

Punto de inflexión en $(1, -4)$

c) para graficar la función $y = 3x^3 - 9x^2 + 2$ a la x le asignamos los siguiente valores

x	y
-1	-10
0	2
1	-4
2	-10
3	2

Los valores que se tomaron en consideración para trazar la gráfica de la función , son valores de x que se seleccionaron de cada uno de los intervalos laterales, de los valores críticos de x y del valor de x del punto del de inflexión.



EJERCICIOS III

UTILIZANDO EL PROCEDIMIENTO ANTERIOR

Calcule:

a) Los intervalos donde la función es creciente y decreciente
b) Los puntos máximos , los puntos mínimos y los puntos de inflexión , si es que los hay
c) Grafique la función

En cada uno de los siguientes ejercicios:

1. $y = 2x^3 - 6x + 1$
2. $y = x^3 + x^2 - 5x$
3. $y = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$
4. $y = 2x^3 - \frac{x^2}{2} - 12x + 1$
5. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$
6. $y = x^3 + 3x^2 + 1$
7. $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x - 2$
8. $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + 20$
9. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$
10. $y = x^2 - 6x + 7$
11. $y = x^3 - 12x + 10$
12. $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 20$
13. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 10$
14. $y = x^2 - 4x + 5$
15. $y = 2x^2 - 3x + 4$
16. $y = x^3 - x$
17. $y = 6x^3 - 18x^2 + 12x - 15$
18. $y = 2x^2 + 8x + 1$
19. $y = -x^2 + 2x + 4$
20. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x - 20$

21.- $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 100$

22.- $y = \frac{3}{2}x^2 + 6x - 20$

23. $y = 6x^2 - 48x + 100$

24.- $y = \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 16x + 100$

25.- $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x + 5$

APLICACIONES A INGRESOS, COSTO S Y UTILIDADES

$$Función\ de\ Ingreso\ Total = (precio)(\ cantidades\ x)$$

$$It = P.x$$

$$Función\ de\ Ingreso\ promedio = \frac{Función\ Ingreso\ Total}{numero\ de\ unidades\ x}$$

$$\overline{It} = \frac{It}{x}$$

$$Función\ Costo\ Total = Costos\ Fijos + Costos\ variables\ (depende\ de\ la\ unidades\ x\ )$$

$$CT\ =\ CF\ + Cv\ (x)$$

$$función\ de\ costo\ promedio = \frac{Función\ costo\ Total}{numero\ de\ unidades\ x}$$

$$\overline{Ct} = \frac{Ct}{x}$$

$$Función\ de\ Utilidad\ o\ pérdida\ total = Función\ de\ Ingreso\ Total - Costo\ Total$$

$$Ut\ o\ Pt = \ It - Ct$$

$$Ut = \ (p.x) - \big(\ Cf\ -\ Cv(x)\big)\ = px\ - Cf\ - Cv\ (x)\ \ =\ \ x\ (\ p - Cv\ ) - Cf$$

El siguiente cuadro representa una guía en la aplicación de las derivadas en Funciones de Ingreso, Costo y Utilidades.

Si se busca la unidades x en donde	A la función que se aplicara el procedimiento para calcular Máximos o Mínimos será a
Los Ingresos totales son Máximos	La Función de Ingreso Total
Los costos totales son mínimos	La Función de Costo total
La Utilidad total es máxima	La función de utilidad total
El Costo promedio es mínimo	La función de costo promedio
El Ingreso Marginal es Máximo	La función de Ingreso marginal
El costo Marginal es mínimo	La función de Costo Marginal

OTRO PRODECIMIENTO UTILIZADO PARA CALCULAR LAS UNIDADES x EN DONDE LA UTILIDAD TOTAL ES MÁXIMA ES USANDO LA APROXIMACIÓN MARGINAL , QUE CONSISTE EN IGUALAR LA FUNCION DE INGRESO MARGINAL CON EL COSTO MARGINAL.

$El\ ingreso\ marginal\ \ es\ igual\ \ la\ primera\ derivada\ del\ Ingreso\ total.$ **es el ingreso que se obtiene al vender una unidad adicional.**

$$It' = \frac{dIt}{dx}$$

$El\ costo\ marginal\ es\ igual\ a\ la\ primera\ derivada\ del\ Costo\ total\ .es\ el\ costo\ que\ se\ obtiene$

Al producir la siguiente unidad.

$$Ct' = \frac{dCt}{dx}$$

Cuando el $Ingreso\ marginal\ es\ igual\ al\ costo\ marginal$ **. se obtienen la unidades** x **que deben producirse o venderse para tener las Utilidades máximas.**

$$Ingreso\ marginal = costo\ Marginal$$

$$It' = Ct'$$

Resolviendo esta igualdad se obtienen la unidades x **que deben producirse o venderse para tener las Utilidades máximas.**

Por ejemplo.

Una empresa productora de sillas opera en el mercado con la siguiente función de costos totales $Ct = 900 - 35x + x^2$ **, si el precio de venta en el mercado es de $625 por silla.**

a) **¿ Cuantas sillas deben producirse y/o venderse para tener las Utilidades Maximas?**
b) **¿Cuáles son las Utilidades Maximas?**
c) **En el caso de que la empresa produzca un 35% mas de las sillas que se calcularon en el inciso a .¿ cual sería la Utilidad que se obtendría en este nivel de producción?**

Solución.

Datos:

Tenemos la función de costo total $Ct = 900 - 35x + x^2$ **y con el precio de venta por cada silla determinamos la función de Ingreso Total** $It = P.x = 625x$

$x = cantidad\ \ de\ sillas$ **producidas y/o vendidas**

Con la información anterior determinamos la función de Utilidad total
$Ut = It - Ct = 625x - (900 - 35x + x^2) = 625x - 900 + 35x - x^3 = 660x - 900 - x^2$

$$Ut = 660x - 900 - x^2$$

a) **Utilizando la aproximación marginal , para obtener las sillas** x **que deben producirse para tener las Utilidades Máximas , la función de Ingreso Marginal se iguala a la del Costo marginal.**

Función de ingreso marginal $It' = \frac{dIt}{dx} = \frac{d625x}{dx} = 625$

Función de costo marginal $Ct' = \frac{dCt}{dx} = \frac{d(900-35x+x^2)}{dx} = -35 + 2x$

$$It' = Ct'$$

$625 = -35 - 2x$, Resolviendo esta ecuación tendremos que $x = \frac{660}{2} = 330$ este valor representa el número de sillas que deben producirse y/o venderse para que se tengan la utilidades máximas

b) El valor de $x = 330$ se sustituye en la función de Utilidad $Ut = 660x - 900 - x^2$

$Utmaxima = 660(330) - 900 - (330)^2 = 217,800 - 900 - 108,900 = \$108,000$

c) Incrementando un 35% el valor de $x = 330$ tenemos que $x = (330)(1.35) = 445.5$ sillas, sustituyendo este nuevo valor de x en la función de Utilidad $Ut = 660x - 900 - x^3$ tendremos que la $Ut = 660(445.5) - 900 - (445.5)^2 = 294,030 - 900 - 198,470.25 = \$94,659.75$

EJERCICIOS IV

1. El costo de fabricación de x relojes, esta dado por $Ct = 1500 + 3x + x^2$

Calcule:

a) La función de costo marginal.
b) El costo marginal cuando $x = 40$
c) El costo real de fabricación del reloj cuadragésimo primero.

2. Considere una empresa que opera en el mercado bajo la siguiente función de costos totales $Ct = 0.1x^2 + 10x + 50$, y con precio de venta dado por el mercado de $20 por unidad . dada esta información. Conteste cada una de las siguientes preguntas.
   a) ¿Cuantos relojes debe de producir la empresa , para obtener las utilidades máximas?
   b) ¿a cuánto ascienden las utilidades máximas?.

3. La demanda de un producto de una compañía varia según el precio que le fije al producto. La compañía ha descubierto que el ingreso total anual It (expresado en miles de pesos) es una función del precio p (en pesos). Siendo la función de ingreso total $It = -50p^2 + 500p$
   a) Determine el precio p que debería cobrarse con objeto de tener el ingreso total máximos.
   b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total anual?.

4. El costo total de la producción x unidades de cierto producto se describe por medio de la función $Ct = 100,000 + 1500\,x + 0.2x^2$ donde Ct es el costo total expresado en pesos,

Determine.

a) ¿Cuántas unidades x deberían fabricarse a fin de minimizar el costo promedio por unidad.
b) ¿Cuál es el costo promedio minimo?

5. **Una compañía ha descubierto que el ingreso total es una función del precio fijado a su producto. La función de ingreso total es $It = -20p^2 + 1960\,p$, donde p es el precio en dólares.**
a) **Determine el precio p que produce el máximo ingreso total.**
b) **¿Cuál es el valor máximo del ingreso total?.**

6.- la función de demanda del producto de una empresa es $x = 300000 - 75p$ donde x representa el número de unidades demandadas y p indica su precio en pesos.

a) determine el precio que deberá cobrarse para maximizar el ingreso total.
b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total?
c) ¿Cuántas unidades x se esperan que se demanden?.

7.- la utilidad anual de una compañía depende del número de unidades producidas , la función que describe la relación existente entre la utilidad Ut (expresada en pesos) y el número de unidades producidas x es : $Ut = 6000x - 25\,000\,000 - 0.12x^2$.

a).- determine el número de unidades x que producirá la utilidad máxima.
b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

8.- El director de una determinada empresa editorial ha observado que si fija el precio de un determinado libro en \$ 20 , vende 10 000 ejemplares . pero por cada peso que incrementa el precio, las ventas disminuyen en 400 ejemplares .

a) **Que precio deberá fijar el editor a cada libro , de manera que el ingreso para la empresa por la venta de estos libros sea máxima.**
b) **¿Cuál es el valor de dicho ingreso?**

Solución.

Los ingresos se calculan multiplicando el precio por el números de ejemplares vendidos

Ingreso total por vender 10 000 ejemplares $It = P.x = (20)(10\,000)$

Supongamos que x sea el número de pesos en que se incrementa el precio del artículo, entonces el nuevo precio del artículo será $p = 20 + x$
$son\ el\ numero\ de\ los\ ejemplares\ que\ se\ dejan\ de\ vender\ por\ cada\ peso\ que\ aumenta\ el\ precio$

$400\,x$ **es el número de ejemplares que dejan de venderse por cada peso que aumenta el precio .**

$10\,000 - 400x\ \ es\ el\ nuevo\ número\ de\ ejemplares\ vendidos$

Entonces, la función que representa el ingreso en términos del numero de pesos en que se aumenta el precio del libro es $It = P.x = (20 + x)(10\,000 - 400x)$ esta función es la función objetivo que es la que se requiere optimizar.

1) **Se calcula la primera derivada del $It = P.x = (20 + x)(10\,000 - 400x)$**

$\frac{dIt}{dx} = (20 + x)(-400) + (10\,000 - 400x)(1) = -8000 - 400x + 10\,000 - 400x$

$\frac{dIt}{dx} = -800x + 2000$

2) La $\frac{dIt}{dx} = 0 \qquad -800x + 2000 = 0$ se resuelve esta ecuación $x = \frac{2000}{800} = \frac{20}{8} = \$\,2.5$
Este valor representa un valor critico del precio x

3) Se calcula la $\frac{d^2It}{dx^2} = -800$

4) El valor critico de $x = \$\,2.5$ se sustituye en $\frac{d^2It}{dx^2} = -800$; para $x = \$\,2.5$ la $\frac{d^2It}{dx^2} = -800$ como el signo de la segunda derivada es NEGATIVO , entonces este valor de $x = \$\,2.5$ representa el número de pesos en que debe incrementarse el precio del libro a fin de tener los ingresos máximos.

b),. De esta manera, al incrementar el precio de venta del libro en $2.50 , se obtiene el máximo ingreso, para calcular el ingreso máximo el valor de $x = \$\,2.5$ se sustituye en la función

$It = P.x = (20 + x)(10\,000 - 400x) = (20 + 2.5)\big(10\,000 - 400(2.5)\big)$

$Itmaximo = (22.5)(10\,000 - 1\,000) = (22.5)(9\,000) = \$\,202\,500$

EJERCICIOS V

1. Suponga que el costo total de fabricación de x artículos es $CT = x^3 - 30x^2 + 400x + 500$ pesos a) Hallar el nivel de producción de x al cual tiene un punto de inflexión la función de costo total. b) Hallar el nivel de producción x en el cual el costo marginal es mínimo c) Represente gráficamente la funciones de costo total y costo marginal	2. Suponga que el costo marginal de fabricación de x artículos es $CT' = 6x^2 - 240x + 3000$ pesos por artículo. a) Hallar el nivel de producción x en el cual el costo marginal es mínimo.
3. Sea la función de costo total $CT = 1000 + 10x + 0.1x^2$ a) Determine la función de costo promedio y la función de costo marginal.	4. Calcule el costo marginal de las funciones de costos siguientes a) $CT = 100 + 2x$. b) $CT = 40 + (Ln2)x^2$ c) $CT = 0.0001x^3 - 0.09x^2 + 20x + 1200$
5. Calcule el ingreso marginal de las funciones de ingreso siguientes a) $It = x - 0.01x^2$ b) $It = 5x - 0.01x^{\frac{5}{2}}$	6. Si la ecuación de demanda es $x + 4p = 100$ calcule la función de ingreso marginal
7. Si la ecuación de demanda es $\sqrt{x} + p = 10$. Calcule la función de ingreso marginal	8. Si la ecuación de demanda es $10p + x + 0.01x^2 = 700$ calcule el ingreso marginal
9. Si la función de ingreso es $It = 25x - 0.25x^2$ y la función de costo total es $Ct = 100 + 5x$ calcule la función de la utilidad marginal.	10. Una subsidiaria de la compañía electrónica Elektra fabrica una calculadora de bolsillo programable. La gerencia determinó que el costo total diario de producción de estas calculadoras (en pesos) está dado por $CT = 0.0001x^3 - 0.08x^2 + 40x + 5000$ Donde x representa las calculadoras producidas a) Hallar la función de costo marginal b) ¿Cuál es el costo marginal cuando $x = 200,300,400 \; y \; 600$ c) Interprete los resultados
11. El costo semanal total, en pesos , por la fabricación de x discos de larga duración por parte de la compañía grabadora Lincoln es $CT = 2000 + 2x - 0.0001x^2$ (0≤ x ≤ 6000) a) ¿Cuál es el costo real de producción de los discos 1001 y 2001? ¿Cuál es el costo marginal cuando $x = 1000 \; y \; cuando \; x = 2000$?	