MATRICES.

Una matriz es un conjunto ordenado de números.
Un determinante es un número.
CONCEPTO DE MATRIZ. Se llama matriz a un conjunto ordenado de números , dispuestos en m filas y $n\ columnas$.
Las líneas horizontales reciben el nombre de filas, renglones o hileras y las líneas verticales se llaman columnas. El número de filas puede ser menor, igual o mayor que el número de columnas .
Los siguientes son ejemplos de matrices:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0.62 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Las filas se numeran de arriba hacia abajo y las columnas de izquierda a derecha.
En l ejemplo a): la primera fila de la matriz es [3,-4] la segunda fila es [5,6], la primera columna es $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y la segunda columna es $\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$.
ORDEN DE UNA MATRIZ.
El orden de una matriz está dado por el número de filas y columnas que la forman.
Siempre se indica, en primer lugar, el número de filas y después el número de columnas.
Algunas veces se indica el orden de la matriz con un signo X entre el número de filas y el de las columnas, tal como 2X2, 2X4, 3X,4, 4X5, mxn.
Y también se escribe el orden entre paréntesis , separando ambos miembros con una coma como sigue: (2,2), (2,4), (3,4), (4,5), (m,n), etc.
NOTACIÓN DE LAS MATRICES.

- Las matrices se representan con letras latinas mayúsculas A, B, C, etc.
- Los elementos se encierran entre corchetes.
- Se indica el orden de la matriz debajo de la letra mayúscula utilizada.

Por ejemplo :

a) $A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ b) $B_{(2,4)} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 & 1.3 \\ -3 & 6 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$

c) $C_{(3,4)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 3 & \frac{2}{} \\ 0 & \frac{5}{4} & 2 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ d) $D_{(4,2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3/2 \\ 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

Notación de los elementos de una matriz.

Se usan letras minúsculas con un par de subíndices, que indican la fila y la columna correspondientes a cada elemento. Por lo general se escribe $\boldsymbol{a_{ij}}, \boldsymbol{b_{ij}}, \boldsymbol{c_{ij}},\ \boldsymbol{etc}$.en que la letra latina minúscula $(a, b, c, ..)$ hace las veces de elemento genérico de la matriz A, B, C, … respectivamente, el subíndice i representa una fila y el subíndice j una columna.

Esto es el elemento genérico de una matriz A se le representa con $\boldsymbol{a_{ij}}$**,** al de una matriz B con b_{ij} , al de una matriz C con $\boldsymbol{c_{ij}}$, Etc. Para indicar que dicho elemento esta situado en la i-ésima fila y j-ésima columna .

Ejemplo . sea la matriz

$$A_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- El elemento 3 se simboliza por a_{11}, que se lee " a sub uno uno" .
- El elemento 7 se simboliza por a_{12}. que se lee " a sub uno dos" .
- El elemento -4 se simboliza por a_{21}. que se lee " a sub dos uno"
- El elemento 0 se simboliza por a_{22}. que se lee " a sub dos dos"

Notación general.

Una matriz A de orden (2,5) tal como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}$$

Se expresa abreviadamente como $A = [a_{ij}]_{2x5}$ o $A_{(2,5)} = [a_{ij}]$

En general una matriz A de orden (m, n) $tal\ como$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots. & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & .. & .. \\ a_{m1} & .. & a_{mj} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se expresa abreviadamente como $A = [a_{ij}]_{mxn}$ o $A_{(m,n)} = [a_{ij}]$

Ejemplo. Dada la siguiente matriz:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{3} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{9} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1/2} \end{pmatrix}$$

¿Cuáles son los valores numéricos de los siguientes elementos: $t_{13}, t_{43}, t_{35}, t_{33}, t_{22,} t_{41}$?

La expresión a_{ij} representa un elemento de una matriz A que se encuentra ubicado en la fila i y en la columna j.

La expresión $\left(a_{ij}\right)$ es la notación abreviada de una matriz A

Ejercicios .

I. ¿ cuál es el orden de las siguientes matrices:

1. $\begin{pmatrix} 10 & 7 & 5 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4.3 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$

II. Dada la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 721 & 532 \\ 284 & 100 & -50 \\ 30 & 50 & 25 \end{pmatrix}$$

Identifique el valor de los siguientes elementos ; $a_{12}, a_{33}, a_{23.} a_{22}$

III. Dada una matriz T de orden 5X2 , escriba sus elementos en forma simbólica.

Matrices especiales:

Matriz Cuadrada. Es una matriz que consta del mismo número de filas que de columnas. En símbolos, es aquella en que $m = n$, al referirse al orden de una matriz cuadrada de orden (n, n), se dice simplemente que es una matriz cuadrada de orden n.

Por ejemplo:

a) La matriz R = [7] , es una matriz cuadrada de orden 1;
b) La matriz S = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ es cuadrada de orden 2:
c) La matriz T = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 3:
d) Una matriz cuadrada de orden n , se indica en general por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Por el contrario cuando el número de filas no coincide con el número de columnas, se dice que la matriz es rectangular.

Se llama matriz nula la que tiene todos los elementos cero. Por ejemplo

A $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz nula de tamaño 2X2.

Se llama matriz fila a la que solo tiene una fila , es decir su dimensión es $1xn$.

Por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ es una matriz fila de tamaño $1x4$.

Se llama matriz columna a la que solo consta de una columna , es decir su dimensión será $mx1$. Como por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix}$ es una matriz columna de tamaño $3x1$.

Dentro de las matrices cuadradas llamaremos **diagonal principal** a la formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33 \ldots} a_{nn}$. en la matriz

D $= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & \mathbf{3} \\ 6 & \mathbf{5} & 4 \\ \mathbf{-3} & -4 & 0 \end{pmatrix}$ su diagonal principal está formada por 1, 5, 0

La diagonal secundaria es la que esta formada por los elementos $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2 \ldots} a_{n1}$, en la matriz D estaría formada por 3, 5, -3.

Una clase especial de matrices cuadradas son las **matrices triangulares**, **una matriz es triangular superior** si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & \mathbf{7} \\ 0 & \mathbf{5} & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

una matriz es triangular inferior si todos los elementos por encima de la diagonal principal son nulo $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} \\ 6 & \mathbf{5} & 0 \\ \mathbf{-3} & -4 & 4 \end{pmatrix}$

Una matriz es matriz diagonal si es a la vez triangular superior e inferior, solo tiene elementos en la diagonal principal . $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{5} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Si una matriz diagonal tiene en su diagonal principal solo unos, se denomina **matriz unidad o identidad. se suele representar por $\mathbf{I_n}$. En donde $\boldsymbol{n}$ es el orden o tamaño de la matriz. Por ejemplo: tenemos una matriz $\mathbf{I_3}$** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

OPERACIONES CON MATRICES.

SUMA Y DIFERENCIA. Dadas dos matrices A y B podemos realizar su suma o diferencia de acuerdo a la siguiente regla. Para sumar o restar dos matrices del mismo tamaño, se suman o restan los elementos que se encuentran en la misma posición, resultando otra matriz de igual tamaño: por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Orden 2x3 2x3 2x3

Si las matrices tienen diferente tamaño, no se pueden sumar o restar entre si.

Propiedades de la suma (y diferencia) de matrices.

a) Conmutativa: A + B = B + A
b) Asociativa: A + (B + C) = (A + B) + C
c) Elemento neutro: la matriz nula del tamaño correspondiente.
d) Elemento opuesto de A. la matriz **- A** . que resulta de cambiar de signo a los elementos de A.

Ejemplo si A = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 2 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow$ - A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

3x2 3x2

Dos matrices A = $[a_{ij}]_{mxn}$ y B = $[b_{ij}]_{mxn}$ son iguales , si y solo si satisfacen las siguientes condiciones:

i) Son del mismo orden.
ii) Los elementos correspondientes son iguales.

$$\boldsymbol{A = B \rightarrow a_{ij} = b_{ij} \ para\ toda\ i, j}$$

Dada las siguientes matrices , indique cuales cumplen la relación de igualdad.

i) A = $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ **ii)** C = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ D = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

iii) **E =** $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ F = $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

iv) **G =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

H = $\begin{pmatrix} \mathbf{1+0} & \mathbf{(-2)(-2)} & \mathbf{2-2} \\ \mathbf{4/2} & \mathbf{24/3} & \mathbf{20/5} \end{pmatrix}$

Solucion. $\boldsymbol{A = B}$

$\boldsymbol{C \neq D}$

$\boldsymbol{E \neq F}$

$\boldsymbol{G = H}$

Producto de una matriz por un número real.

Dada una matriz cualquiera A y un número real K , el producto K.A se realiza multiplicando todos los elementos de A por K. resultando otra matriz de igual tamaño. (esta misma regla sirve para dividir una matriz por un número real)

Por ejemplo:

$$-5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -5 & -15 \\ 20 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

a) Distributiva respecto de la suma de matrices: K.(A + B) = K.A + K.B
b) Distributiva respecto a la suma de números: (K + d) .A = K . A + d. K
c) Asociativa : K. (d.A) = (K. d) . A
d) Elemento neutro, el número 1: 1.A = A

Multiplicación de una matriz **A** de orden $\boldsymbol{mxn}$ por una matriz **B** de orden $\boldsymbol{sxt}$, el resultado es una matriz de de orden $\boldsymbol{mxt}$

El producto o multiplicación de AxB puede efectuarse únicamente si el número de **columnas** de la **primera matriz** es igual al número de **filas o renglones** de la **segunda matriz.**

si $\underset{columnas}{\underset{\uparrow}{n}} = \underset{filas}{\underset{\uparrow}{s}}$ $\qquad \underset{m\,x\,n}{A} \qquad \underset{s\,x\,t}{B}$

$\uparrow = \uparrow$

$$A\,X\,B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

Orden $2\ x\ 3$ $\qquad 3\ x\ 3$ $\qquad 2\ x\ 3$

$$c_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = (a_{11})(b_{11}) + (a_{12})(b_{21}) + (a_{13})(b_{31})$$

$$c_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = (a_{21})(b_{12}) + (a_{22})(b_{22}) + (a_{23})(b_{32})$$

$$c_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = (a_{21})(b_{12}) + (a_{22})(b_{22}) + (a_{23})(b_{32})$$

$$c_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = (a_{21})(b_{11}) + (a_{22})(b_{21}) + (a_{23})(b_{31})$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = (a_{21})(b_{12}) + (a_{22})(b_{22}) + (a_{23})(b_{32})$$

$$c_{23} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = (a_{21})(b_{13}) + (a_{22})(b_{23}) + (a_{23})(b_{33})$$

Ejemplo. Sean las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Orden $2 \ x \ 3$ $\qquad$ $3 \ x \ 3$

Calcular A X B . solución.

Primero debemos verificar si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de las filas de la segunda ; en este caso la matriz A tiene 3 columnas y la matriz B tiene 3 filas , como esta condición se cumple , entonces podemos realizar la operación de multiplicación de A X B , y el resultado nos dará una matriz de orden 2 x 3 .

$$A \ X \ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = (3)(1) + (4)(4) + (2)(3) = 3 + 16 + 6 = 25$$

$$c_{12} = (3)(2) + (4)(1) + (2)(0) = 6 + 4 + 0 = 10$$

$$c_{13} = (3)(4) + (4)(5) + (2)(1) = 12 + 20 + 2 = 34$$

$c_{21} = (3)(1) + (9)(4) + (1)(3) = 3 + 36 + 3 = 42$

$c_{22} = (3)(2) + (9)(1) + (1)(0) = 6 + 9 + 0 = 15$

$c_{23} = (3)(4) + (9)(5) + (1)(1) = 12 + 45 + 1 = 58$

Por lo tanto la matriz resultante es: $C = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 34 \\ 42 & 15 & 58 \end{pmatrix}$

Transposición. La transpuesta de una matriz $A = [a_{ij}]$ de orden mxn es una matriz de orden nxm , que se obtiene intercambiando filas por columnas (o columnas por filas). El elemento a_{ij} de la matriz A , ocupa el lugar de a_{ji} .

La transpuesta de la matriz A , se simboliza por A^t.

Si $A = [a_{ij}]$ su transpuesta es $A^t = [a_{ji}]$

(m, n) mxn (n, m) nxm

Si A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ su transpuesta es A^t = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$

Ejemplo. Encontrar la matriz transpuesta de la siguiente matriz:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz transpuesta de A es $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

EJERCICIOS.

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   Calcule la matriz $C = A\,x\,B$ obtenga los elementos c_{21} y c_{23}

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

   Calcule la matriz $C = A\,x\,B$ obtenga los elementos c_{21} , c_{23} , c_{31} , c_{42}

3. Dada las matices A $= \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

   Calcule la matriz $C = A\,x\,B$

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Desarrolle la obtención del elemento c_{23}

b) ¿ $A \, x \, B$ es igual que $B \, x \, A$?

5. Si A es una matriz de 3 X 4 , B es una matriz de 4 X 3 , C es de 2 X 3 y D es de 4 X 5 ¿calcule los tamaños de los productos o multiplicación de matrices siguientes:

   a) $A \, x \, B$ b) $B \, x \, A$ c) $C \, x \, A$

   d) $A \, x \, D$ e) $C \, x \, A \, x \, D$ f) $C \, x \, B \, x \, A$

I. Efectúe las operaciones indicadas y simplifique :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

II. **Sean las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Calcule: **a)** A x B **b)** B X A **c)** A + B **d)** B + A **e)** A – B **f)** B – A

III. Sean la matrices $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ **e** $I = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) ¿ el producto de A x I es igual al producto de I x A ? verifique.

IV. **Sean las matrices** :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Establezca el orden de cada matriz.
b) ¿Cuáles matrices son cuadradas?
c) ¿Cuáles son vectores renglón?
d) ¿Cuáles son vectores columna?
e) En la matriz B ¿ cuáles son los elementos? b_{43}, b_{12}, b_{22}, b_{23} b_{45}

V. En las siguientes matrices :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuáles son los tamaños de las matrices A, B, C y D?
b) Explique porque no existe la matriz A – C
c) Calcule A + B
d) Calcule 2 A – 3B
e) Calcule C - D
f) Calcule 4D – 2 C

VI. Efectúe las operaciones indicadas en los siguientes ejercicios:

1. $$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -4 \\ 6 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 11 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & -6 & 2 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -9 & -1 & 4 \\ 6 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

VII. En los siguientes ejercicios encuentre la transpuesta de la matriz:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

VIII. **Efectué las operaciones indicadas en los siguientes ejercicios**

1. $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

5. **Para** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **calcule** $\mathbf{A^2 + 2A - 3I}$

6. **Para** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ **calcule** $\mathbf{A^2 - 5A + 2I}$

7. **Dadas** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ **eencuentre**

a) $(A + B)^2$ **b)** $\mathbf{A^2 + 2AB + B^2}$

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden escribirse en la forma de ecuaciones matriciales por ejemplo. Considérese el sistema

$$\mathbf{2x - 3y = 7}$$

$$\mathbf{4x + y = 21}$$

Consta de dos ecuaciones lineales simultaneas en las variables x y y y tenemos el producto de matrices siguientes :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2}\boldsymbol{x} & \mathbf{-3}\boldsymbol{y} \\ \mathbf{4}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

Pero de las ecuaciones dada, tenemos la igualdad siguiente

$$\begin{pmatrix} 2x & - & 3y \\ 4x & + & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{21} \end{pmatrix}$$

Por consiguiente : $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{21} \end{pmatrix}$

Si definimos matrices A , B y X como

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{21} \end{pmatrix}$

Entonces esta ecuación matricial puede escribirse como:

$$\boldsymbol{A \, x \, X = B}$$

Obsérvese que las matrices A y B tienen elementos cuyos valores son números dados, la matriz $\boldsymbol{X}$, contiene las cantidades desconocidas $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, la matriz columna $\boldsymbol{X}$ por lo regular se conoce como vector de variable, $\boldsymbol{A}$ se denomina matriz de coeficientes y $\boldsymbol{B}$ se llama matriz de valores .

Definiendo matrices adecuadas $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{X}$ cualquier sistema de ecuaciones lineales puede expresarse como una ecuación matricial.

Ejemplo. Exprese el sistema de ecuaciones siguiente en forma matricial

$$2x + 3y + 4z = 7$$

$$4y = 2 + 5z$$

$$3z - 2x + 6 = 0$$

Solución. En primer término disponemos las ecuaciones de modo que los términos constantes aparezcan del lado derecho y las variables $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ estén alineadas en columnas en el lado izquierdo

$$2x + 3y + 4z = 7$$

$$0x + 4y - 5z = 2$$

$$-2x + 0y + 3z = -6$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

El sistema dado puede escribirse en la forma $\mathbf{A}\ \mathbf{X} = \mathbf{B}$ **,** **A y B** son matrices de números conocido y **X** es la matriz cuyo elemento son las variables desconocidas.