DESIGUALDADES LINEALES

Las desigualdades son enunciados que indican que dos cantidades nos on iguales, y las podemos identificar por el uso de uno o más de los siguientes símbolos de desigualdad:

$\boldsymbol{a < b\ quiere\ decir}$ **¨a es menor que b"**
$\boldsymbol{a > b\ quiere\ decir}$ **" a es mayor que b"**
$\boldsymbol{a \leq b\ quiere\ decir}$ **" a es menor o igual que b"**
$\boldsymbol{a \geq b\ quiere\ decir}$ **a es mayor o igual que b"**
Para indicar que 2 es menor que 3, podemos escribir $2 < 3$, para indicar que x es mayor o igual que 4, escribimos $\mathrm{x} \geq 4$.

NOTACIÓN INTERVALO. La notación intervalo se usa para representar un conjunto de valores que puede toma una variable de un punto a otro punto.

Tipos de intervalos :

INTERVALO CERRADO. Representado por $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Está definido por el conjunto de todos los números reales x tales que $a \leq x \leq b$. La x toma todos los valores que se encuentran entre $a\ y\ b$, considerando el valor de $a \quad y \quad el\ valor\ de\ b$.

INTERVALO ABIERTO. Representado por $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Está definido por el conjunto de todos los números reales x tales que $a < x < b$. La x toma todos los valores que se encuentran entre $a\ y\ b$, sin considerando el valor de $a \quad ni \quad el\ valor\ de\ b$.

INTERVALO SEMIABIERTO POR LA IZQUIERDA. Representado por $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Está definido por el conjunto de todos los números reales x tales que $a < x \leq b$. La x toma todos los valores que se encuentran entre $a\ y\ b$, sin considerando el valor de $a \quad pero\ si \quad el\ valor\ de\ b$.

INTERVALO SEMIABIERTO POR LA DERECHA. Representado por $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Está definido por el conjunto de todos los números reales x tales que $a \leq x < b$. La x toma todos los valores que se encuentran entre $a\ y\ b$, considerando el valor de $a \quad pero\ no \quad el\ valor\ de\ b$.

Los símbolos $, +\infty$ $(\textbf{mas infinito o infinito positivo})\boldsymbol{y} - \infty$ (menos infinito o infinito negativo) se usan para representar cantidades muy grandes de una variables tanto positivas como negativas.

La notaciones:

$[a, +\infty)$ **. Definen el conjunto de todos los nueros reales $x \geq a$.** La x toma todos los valores que se encuentran a la derecha de a, incluyendo el valor de a.

$(a, +\infty)$ **. Definen el conjunto de todos los nueros reales $x > a$.** La x toma todos los valores que se encuentran a la derecha de a, sin considerar el valor de a.

$(-\infty, a]$**. Definen el conjunto de todos los nueros reales $x \leq a$.** La x toma todos los valores que se encuentran a la izquierda de a, incluyendo el valor de a.

$(-\infty, a)$**. Definen el conjunto de todos los nueros reales $x < a$.** La x toma todos los valores que se encuentran a la izquierda de a, sin considerar el valor de a.

La notación de intervalos, representa el conjunto de números reales que pude tomar una variables y no las coordenadas de un punto en una gráfica.

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES.

PROPIEDAD 1. Todo número real se puede sumar o restar de ambos lados de una desigualdad, para producir otra desigualdad con la misma dirección.

Esta propiedad indica que cualquier número se puede sumar a ambos lados de una desigualdad para obtener otra desigualdad en la misma dirección. Por ejemplo, si sumamos 4 a ambos lados de la desigualdad $\mathbf{3 < 12}$ **,** llegamos a $\mathbf{3 + 4 < 12 + 4}$ $\mathbf{7 < 16}$ y no cambia el signo.

Si restamos 4 a ambos lados de $\mathbf{3 < 12}$, tampoco cambia la dirección de la desigualdad $\mathbf{3 - 4 < 12 - 4 \quad -1 < 8}$

PROPIEDAD 2. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por un número positivo, se obtiene otra desigualdad que tiene la misma dirección que la original.

Esta propiedad indica que los dos lados de una desigualdad se pueden multiplicar por cualquier número positivo para obtener otra desigualdad con la misma dirección.

Por ejemplo, si se multiplican por $+2$ ambos lados de la desigualdad $\mathbf{-4 < 6}$ **,** obtenemos

$\mathbf{-4(2) < 6(2) \quad -8 < 12}$ y no cambia el símbolo $<$ **.**

Si dividimos ambos lados entre $+2$ tampoco cambia la dirección de la desigualdad.

$$\mathbf{\frac{-4}{2} < \frac{6}{2} \qquad -2 < 3}$$

PROPIEDAD 3. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican por un número negativo, se obtiene otra desigualdad cuya dirección es contraria a la de la desigualdad original.

Esta propiedad indica que si ambos lados de una desigualdad se multiplican por un número negativo se obtiene otra desigualdad, pero con dirección contraria. Por ejemplo, si se multiplican por -2 ambos lados de la desigualdad $\boldsymbol{-4<6}$ **,** obtenemos

$(-\mathbf{2})(-\mathbf{4})<(-\mathbf{2})(\mathbf{6})$ $\quad \mathbf{8}>-\mathbf{12}$ $\quad$ y el símbolo $<$ se convierte en símbolo $>$**.**

Si se dividen ambos lados entre -2 también se invierte la dirección de la desigualdad.

. Por ejemplo, si se divide entre -2 ambos lados de la desigualdad $\boldsymbol{-4<6}$ **,** obtenemos

$\frac{\mathbf{-4}}{\mathbf{-2}}<\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{-2}}$ $\quad \mathbf{8}>-\mathbf{3}$

Una desigualdad lineal en x es aquella que se puede expresar en una de las formas siguientes, siendo $a\neq 0$:

$\boldsymbol{ax+c<0}$ $\qquad \boldsymbol{ax+c>0}$ $\quad \boldsymbol{ax+c\leq 0}$ **o** $\quad \boldsymbol{ax+c\geq 0}$

Las desigualdades lineales se pueden resolver exactamente como las ecuaciones lineales, pero con una excepción. Si multiplicamos o dividimos ambos lados por un número negativo, debemos cambiar la dirección de la desigualdad.

Ejemplo. Resolver la desigualdad lineal $\mathbf{3}(\boldsymbol{2x-9})<\mathbf{9}$, se resuelve despejando el valor de x , en primer lugar, pasamos el 3 dividiendo al 9 $(2x-9)<\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{3}}$

$2x-9<\mathbf{3}$ ahora como el 9 está restando lo pasamos al otro lado de la igualdad sumando, esto es $2x<\mathbf{3}+\mathbf{9}$ $\quad 2x<\mathbf{12}$, como el 2 está multiplicando lo pasamos dividiendo al otro lado , $\mathbf{9}$ $\quad x<\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{2}}$ por lo tanto , esta desigualdad se cumple para todos los valores de $x<6$, o de otra manera el conjunto solución son todos lo valores de x que se encuentran en el intervalo $(-\infty,6)$.

Ejemplo resolver la desigualdad lineal $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})>\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})$

Solución quitamos paréntesis a ambos lados de la desigualdad

$\frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}>\frac{\mathbf{4x}}{\mathbf{5}}-\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}$ Separamos términos que tienen x y los que no lo tienen, los que tienen x los dejamos en el lado izquierdo y los que no lo tienen los pasamos a lado derecho de la desigualdad , de la siguiente manera $\frac{2x}{3} - \frac{4x}{5} > -\frac{12}{5} - \frac{4}{3}$ **enseguida sumamos términos semejantes** $\frac{10x-12x}{15} > \frac{-36-20}{15}$ $\frac{10x-12x}{15} > \frac{-36-20}{15}$

$\frac{-2x}{15} > \frac{-56}{15}$ el 15 que está dividiendo en el lado izquierdo lo pasamos multiplicando para el lado derecho $-2x > (\frac{-56}{15})(15)$ $-2x > -56$ como el 2 tienen signo negativo al despejar x y pasar el -2 dividiendo al otro lado de la desigualdad tenemos que cambiar el sentido de la desigualdad por lo tanto tenemos que $x < \frac{-56}{-2}$ $x < 28$.

esta desigualdad se cumple para todos los valores de $x < 28$, o de otra manera el conjunto solución son todos lo valores de x que se encuentran en el intervalo $(-\infty, 28)$.

DESIGUALDADES COMPUESTAS.

La desigualdad compuesta $c < x < d$ **es equivalente a** $c < x$ **y** $x < d$

Ejemplo . resolver la desigualdad compuesta $-3 \leq 2x + 5 < 7$ esta desigualdad expresa que $2x + 5$ está entre -3 y 7 , se resuelve despejando a x, **es decir hay que buscar que la x se quede sola, como el 5 está sumando , lo pasamos restando tanto al lado izquierdo como al lado derecho de la desigualdad , de la siguiente manera**

$-3 - 5 \leq 2x < 7 - 5$ $-8 \leq 2x < 2$ **y como el 2 esta multiplicando a x, este lo pasamos dividiendo tanto al lado izquierdo como al lado derecho de la desigualdad , de la siguiente manera** $\frac{-8}{2} \leq x < \frac{2}{2}$ $-4 \leq x < 1$ **esta desigualdad se cumple para todos los valores de** $x \geq -4$ **y** $x < 1$ **, por lo tanto el conjunto solución** son todos lo valores de x que se encuentran en el intervalo $[-4,1)$.

Ejemplo. Resolver la desigualdad $x + 3 < 2x - 1 < 4x - 3$ **en este caso es imposible dejar solo a x entre los símbolos de desigualdad, por lo cuál resolveremos por separado cada desigualdad . de la siguiente manera:**

a) $x + 3 < 2x - 1$ **y** **b)** $2x - 1 < 4x - 3$

La desigualdad a) pasamos las x para el lado izquierdo y los que no tenga x a lado derecho de la desigualdad $x - 2x < -1 - 3$ $-x < -4$ **, dejamos solo a x y pasamos el -1 dividiendo a lado derecho y por consiguiente cambiamos el sentido de la desigualdad,** $x > \frac{-4}{-1} > 4$

Resolviendo la desigualdad b) $2x - 1 < 4x - 3$ pasamos las x para el lado izquierdo y los que no tenga x a lado derecho de la desigualdad $2x - 4x < -3 + 1$
$-2x < -2$, dejamos solo a x y pasamos el -2 dividiendo a lado derecho y por consiguiente cambiamos el sentido de la desigualdad, $x > \frac{-2}{-2} > 1$

Esta desigualdad solo se cumple para valores de , $x > 4$ y , $x > 1$

por lo tanto el conjunto solución son todos lo valores de x que se encuentran en el intervalo $(4, +\infty)$.

I. Resuelva las desigualdades de los ejercicios siguientes, exprese el resultado en notación de intervalo y grafique el conjunto solución.

1. $2x < 4$ **Sol.** $x < 2$	**2.** $3x + 1 \geq 10$ **Sol.** $x \geq 3$
3. $-3x > 12$ **Sol.** $x < -4$	**4.** $-\frac{x}{2} < 4$ **Sol.** $x \geq -8$
5. $-2 < 2x < 8$ **Sol.** $-1 < x < 4$	**6.** $3 \leq \frac{x}{3} \leq 4$ **sol.** $9 \leq x \leq 12$
7. $x + 4 < 5$ **Sol.** $x < 1$	**8.** $x - 5 > 2$ **Sol.** $x > 7$
9. $-3x - 1 \leq 5$ **Sol.** $[-2, +\infty)$.	**10.** $5x - 3 > 7$ **Sol.** $x > 2$
11. $3(x - 2) \leq 2(x + 7)$ **sol.** $x \leq 20$	**12.** $-11(2 - b) < 4\ (2b + 2)$ **Sol.** $x < 10$
13. $\frac{1}{2}x + 2 \geq \frac{1}{3}x - 4$ $Sol. x \geq -36$	**14.** $\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}(x - 5) \leq x$ **sol.** $x \leq \frac{45}{7}$

II. Resuelva las desigualdades compuestas de los ejercicios siguientes, exprese el resultado en notación de intervalo y grafique el conjunto solución.

1. $-2 < -x + 3 < 5$ **Sol.** $(-2, 5)$	**2.** $15 > 2x - 7 > 9$ **Sol.** $(8, 11)$
3. $-6 < -3(x - 4) \leq 24$ **Sol.** $[-4, 6)$	**4.** $0 \leq \frac{4-x}{3} \leq 2$ **Sol.** $[-2, 4)$
5. $x + 3 < 3x - 1 < 2x + 3$ Sol. $(2, 3)$	6. $4x \geq -x + 5 \geq 3x - 4$ Sol. $[1, \frac{9}{4}]$

ECUACIONES Y DESIGUALDADES CON VALORES ABSOLUTOS.

Valor absoluto de x

Si $x > 0, entonces \mid x \mid = x$

Si $x < \mathbf{0}, \mathbf{entonces} \mid x \mid = -x$

Esto nos indica que el valor absoluto de cualquier número real siempre es positivo.

Ecuaciones con valor absoluto.

Si $k > 0$, $entonces$

$\mid x \mid = k$ equivale a $x = k \;\; o \; a \;\; x = -k$

El valor absoluto de un número representa la distancia , en la recta numérica, entre un punto y el origen. Las soluciones de $\mid x \mid = k$ son las coordenadas de dos puntos que quedan exactamente a k unidades del origen.

La ecuación $\mid x - 3 \mid = 7$ indica que un punto de la recta numérica , cuyas coordenadas es $x - 3$ está a 7 unidades del origen. Así , x puede ser 7 o -7.

$x - 3 = 7$ $x = 7 + 3$ $x = 10$	o	$x - 3 = -7$ $x = -7 + 3$ $x = -4$

La soluciones de la ecuación $\mid x - 3 \mid = 7$ son 10 y -4

Ejemplo resolver la ecuación $\mid 3x - 2 \mid = 5$

Solución. La ecuación $\mid 3x - 2 \mid = 5$ la podemos escribir en la forma

$3x - 2 = 5$ $3x = 5 + 2$ $3x = 7$ $x = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$	o	$3x - 2 = -5$ $3x = -5 + 2$ $3x = -3$ $x = \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{3}} = \mathbf{-1}$

La soluciones de la ecuación$\mid 3x - 2 \mid = 5$ son $x = \frac{7}{3}$ $y \;\; x = -1$

Ejemplo. Resolver la ecuación $\mid \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} x + 3 \mid + 4 = 10$

Solución. Primero pasamos el 4 restando para el lado derecho de la igualdad , para dejar el valor absoluto en el lado izquierdo.

$|\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}x+3\ |=10-4$ $\qquad |\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}x+3\ |=6$

Ahora podemos escribir la ecuación en las formas

$\frac{2}{3}x+3=6$ $\frac{2}{3}x=6-3$ $\frac{2}{3}x=3$ despejando x $x=\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}$	o	$\frac{2}{3}x+3=-6$ $\frac{2}{3}x=-6-3$ $\frac{2}{3}x=-9$ despejando x $x=\frac{\mathbf{-27}}{\mathbf{2}}$

Las soluciones de la **ecuación** $|\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{x}+\mathbf{3}\ |\mathbf{+4}=\mathbf{10}$ **son** $\mathbf{x}=\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}$ **y** $\mathbf{x}=\frac{\mathbf{-27}}{\mathbf{2}}$

Desigualdades con valor absoluto

TEOREMA

Si $k>0\ ,entonces$

$|\ x\ |<k$ es equivalente a $-k<x<k$

$|\ x\ |\leq k$ es equivalente a $-k\leq x\leq k$ $\quad (k\geq 0)$

Ejemplo resolver la desigualdad $|\mathbf{2}\ \boldsymbol{x}-\mathbf{3}\ |<\mathbf{9}$

Solución. Escribimos la desigualdad en forma de desigualdad compuesta y despejamos a x

$|2\ x-3\ |<9$ equivale a $\quad \mathbf{-9<2x-3<9} \qquad \mathbf{-9+3<2x<9+3}$

$\mathbf{-6<2x<12} \qquad \frac{\mathbf{-6}}{\mathbf{2}}<\mathbf{x}<\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{2}} \qquad \mathbf{-3<x<6}$ **el conjunto solución comprende** todos los valores de $x>-3\ y\ todas\ los\ valores\ de\ x<6$ o todas las $\mathbf{x}$ **que estén en el intervalo** $(\mathbf{-3,6})$**.**

Ejemplo. Resolver la desigualdad $|3x+2\ |\leq 5$

Solución. Escribimos la desigualdad en forma de desigualdad compuesta y despejamos a x

$|3x+2\ |\leq 5$ equivale a $-5\leq 3x+2\leq 5 \qquad -5-2\leq 3x\leq 5-2$

$-7 \leq 3x \leq 3$ $\frac{-7}{3} \leq x \leq \frac{3}{3}$ $\frac{-7}{3} \leq x \leq 1$ **el conjunto solución comprende** todos los valores de $x \geq \frac{-7}{3}$ $y\ todas\ los\ valores\ de\ x \leq 1$ o todas las $\mathbf{x}$ **que estén en el intervalo** $[\frac{-7}{3}, \mathbf{1}]$**.**

TEOREMA

Si $\boldsymbol{k \geq 0}$ **,** $\boldsymbol{entonces}$

$\boldsymbol{|\ x\ | > k}$ **es equivalente a** $\boldsymbol{x < -k \quad o \quad a \quad x > k}$

$\boldsymbol{|\ x\ | \geq k}$ **es equivalente a** $\boldsymbol{x \leq -k \quad o \ a \quad x \geq k}$

Ejemplo. Resolver la desigualdad $\boldsymbol{|\ 5x - 10| > 20}$

Solución. Descomponemos la desigualdad en dos desigualdades independientes, y despejamos a x de cada una.

$\boldsymbol{|\ 5x - 10| > 20}$ **es equivalente a** $\boldsymbol{5x - 10 < -20}$ **o a** $\boldsymbol{5x - 10 > 20}$

Despejando a x en la desigualdad $\boldsymbol{5x - 10 < -20}$ $\boldsymbol{5x < -20 + 10}$

$\boldsymbol{5x < -10}$ $\boldsymbol{x < \frac{-10}{5} < -2}$

Despejando a x en la desigualdad $\boldsymbol{5x - 10 > 20}$ $\boldsymbol{5x > 20 + 10}$ $\boldsymbol{5x > 30}$

$\boldsymbol{x > \frac{30}{5} > 6}$

El conjunto solución comprende todos los valores de $\boldsymbol{x < -2}$ **y** $\boldsymbol{x > 6}$ **o todas las** $\mathbf{x}$ **que están en los intervalos** $\boldsymbol{(-\infty, -2)\ y \quad (6, +\infty)}$

Ejempo. Resolver la desigualdad $\boldsymbol{\left|\ \frac{3-x}{5}\ \right| \geq 6}$

Solución. Descomponemos la desigualdad en dos desigualdades independientes y despejamos a x de cada una.

$\boldsymbol{\left|\ \frac{3-x}{5}\ \right| \geq 6}$ **es equivalente a** $\boldsymbol{\frac{3-x}{5} \leq -6}$ **o** $\boldsymbol{\frac{3-x}{5} \geq 6}$

Despejando a x en la desigualdad $\boldsymbol{\frac{3-x}{5} \leq -6}$ $\boldsymbol{3 - x \leq (-6)(5)}$

$\mathbf{3 - x \leq -30}$ $\quad$ $\mathbf{-x \leq -30 - 3}$ $\quad$ $\mathbf{-x \leq -33}$ **para despejar la x pasamos** $(-\mathbf{1})$ **dividiendo al lado derecho de la desigualdad como es un número negativo , cambiamos el sentido de la desigualdad esto es** $\boldsymbol{x} \geq \frac{\mathbf{-33}}{\mathbf{-1}} \geq \mathbf{33}$ **.**

Despejando a x en la desigualdad $\frac{\mathbf{3-x}}{\mathbf{5}} \geq \mathbf{6}$ $\quad$ $\mathbf{3 - x \geq (6)(5)}$ $\quad$ $\mathbf{3 - x \geq 30}$

$\mathbf{-x \geq 30 - 3}$ $\quad$ $\mathbf{-x \geq 27}$ **para despejar la x pasamos** $(-\mathbf{1})$ **dividiendo al lado derecho de la desigualdad como es un número negativo , cambiamos el sentido de la desigualdad esto es** $\boldsymbol{x} \leq \frac{\mathbf{27}}{\mathbf{-1}} \leq \mathbf{-27}$ **.**

El conjunto solución comprende todos los valores $\boldsymbol{x \geq 33}$ **y** $\boldsymbol{x \leq -27}$ **o todas las** $\mathbf{x}$ **que están en los intervalos** $(-\infty, \mathbf{-27}]$ $\quad \boldsymbol{y} \quad$ $[\mathbf{33}, +\infty)$

III. **Resuelva las desigualdades de los ejercicios siguientes, expese el resultado en notación de intervalo y grafique el conjunto solución.**

1. $\mid 2x \mid < 8$ Sol $(-4,4)$	2. $\mid x + 9 \mid \leq 12$ Sol. $[-21,3]$
3. $\mid 4x - 1 \mid \leq 7$ Sol. . $[\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}}, 2]$	4. $\mid \mathbf{5x} \mid > \mathbf{5}$ **Sol.** $(-\infty. \mathbf{-1}) \boldsymbol{y} (\mathbf{1}, +\infty)$
5. $\mid \boldsymbol{x} - \mathbf{12} \mid > \mathbf{24}$ Sol. $(-\infty. \mathbf{-12}) \boldsymbol{y} (\mathbf{36}, +\infty)$	6. $\mid \mathbf{3x + 2} \mid > \mathbf{14}$ **Sol.** $\left(-\infty. \frac{\mathbf{-16}}{\mathbf{3}}\right) \boldsymbol{y} (\mathbf{4}, +\infty)$
7. $\left\lvert \frac{\boldsymbol{x-2}}{\mathbf{3}} \right\rvert \leq \mathbf{4}$ **Sol.** $[-10,14]$	8. $\mid 3x + 1 \mid + 2 < 6$ **Sol.** $(\frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{3}}, \mathbf{1})$